答案与解析

第26章 二次函数

26.1 二次函数

拔高题训练 正文 P10

1 C 【解析】A 是一次函数，B 中只有当 $a\neq0$ 时才是二次函数，D 中分母中含有自变量 x，不是二次函数。

2 A 【解析】每件服装降价 x 元，每天售出服装的利润为 y 元。由题意得 $y=(210-150-x)\cdot\left(20+\frac{x}{2}\right)=-\frac{1}{2}x^2+10x+1\ 200(0<x<60)$。故选 A。

3 $y=2t^2-40t+200(0\leqslant t\leqslant10)$ 【解析】在 Rt$\triangle ABC$ 向左运动的过程中，重叠部分为等腰直角三角形，$AM=MN-AN=(20-2t)$ cm，则另一腰长也为 $(20-2t)$ cm，故 $y=\frac{1}{2}(20-2t)(20-2t)=2(t-10)^2=2t^2-40t+200(0\leqslant t\leqslant10)$。

4 $y=-x^2+3x$ 【解析】$\because$ 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC=2\sqrt{2}$，AD 为 BC 边上的高，$\therefore\angle BAD=\angle CAD=45°$，$BC=4$，$AD=2$，又 $AP=x$，$\therefore AP=PE=x$，$PD=AD-AP=2-x$。$\therefore y=S_1+S_2=\frac{x\times2}{2}+(2-x)\cdot x=-x^2+3x$。

5 解：(1) 当销售单价定为每千克 55 元时，月销售量为 $500-(55-50)\times10=450$(kg)，所以月销售利润为：$(55-40)\times450=6\ 750$(元)。

(2) 当销售单价为每千克 x 元时，月销售量为：$[500-(x-50)\times10]$(kg)，而每千克的销售利润是 $(x-40)$(元)，所以月销售利润为 $y=(x-40)\times[500-(x-50)\times10]=(x-40)(1\ 000-10x)=-10x^2+1\ 400x-40\ 000$(元)，所以 y 与 x 的函数关系式为 $y=-10x^2+1\ 400x-40\ 000$。

(3) 要使月销售利润达到 8 000 元，即 $y=8\ 000$。

所以 $-10x^2+1\ 400x-40\ 000=8\ 000$，即 $x^2-140x+4\ 800=0$。

解得 $x_1=60$，$x_2=80$。

当销售单价定为每千克 60 元时，月销售量为

$500-(60-50)\times10=400$(kg)，

月销售成本为 $40\times400=16\ 000$(元)。

当销售单价定为每千克 80 元时，月销售量为

$500-(80-50)\times10=200$(kg)，

月销售成本为 $40\times200=8\ 000$(元)。

由于 $8\ 000<10\ 000<16\ 000$，

而月销售成本不能超过 10 000 元，

因此销售单价应定为每千克 80 元。

6 解：(1) 若函数解析式为 $y=ax+b$，

由 $x=40$，$y=16$ 和 $x=60$，$y=30$，

得 $\begin{cases}40a+b=16,\\60a+b=30,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{7}{10},\\b=-12,\end{cases}$

则 $y=\frac{7}{10}x-12$，但 $x=80$ 时，$y=56-12=44\neq48$，

故不可能是一次函数。

若函数解析式为 $y=\frac{k}{x}$，

当 $x=40$，$y=16$ 时，$k=xy=640$。

所以 $y=\frac{640}{x}$，但当 $x=60$ 和 $x=80$ 时所得 y 值均不符合。

若函数解析式为 $y=ax^2+bx$，

由 $x=40$，$y=16$ 和 $x=60$，$y=30$，

得 $\begin{cases}1\ 600a+40b=16,\\3\ 600a+60b=30,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{200},\\b=\frac{1}{5},\end{cases}$

所以 $y=\frac{1}{200}x^2+\frac{1}{5}x$。

当 $x=80$ 时，$y=\frac{1}{200}\times80^2+\frac{1}{5}\times80=32+16=48$。

符合关系式。故函数解析式为 $y=\frac{1}{200}x^2+\frac{1}{5}x$。

(2) 当 $y=70$ 时，由 $\frac{1}{200}x^2+\frac{1}{5}x=70$，

解得 $x_1=100$，$x_2=-140$(舍)。

故汽车刹车速度为 100 km/h。

26.2 二次函数的图像与性质

拔高题训练 正文 P28

1 B 【解析】$y=x^2-8x-9=x^2-8x+16-16-9=(x-4)^2-25$。

2 C 【解析】$\because$ 当 $x=0$ 时，$y=ax^2-2x=0$，即抛物线 $y=ax^2-2x$ 经过原点，故 A 错误；$\because y=\frac{ab}{x}$ 的图象在第一、三象限，$\therefore ab>0$，即 a，b 同号，当 $a<0$

时，抛物线 $y=ax^2-2x$ 的对称轴 $x=\frac{1}{a}<0$，故 D 错误；当 $a>0$ 时，$b>0$，直线 $y=bx+a$ 经过第一、二、三象限，故 B 错误，C 正确。

3 C 【解析】设抛物线为 $y=a(x+2)^2+1$，将 $(1,-8)$ 代入得 $9a+1=-8$，$\therefore a=-1$，故解析式为 $y=-(x+2)^2+1$。

4 D 【解析】由图可以看出，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 开口方向向下，$\therefore a<0$。$\because$ 对称轴在 y 轴右侧，

$\therefore x=-\frac{b}{2a}>0$，$\therefore a,b$ 异号，$\therefore b>0$。

$\because$ 抛物线与 y 轴的交点在 y 轴的正半轴，$\therefore c>0$，

$\therefore abc<0$，故选项 A 正确。

由图可以看出，抛物线与 x 轴的一个交点在点 $(-1,0)$ 的右边，

$\therefore$ 当 $x=-1$ 时，$y<0$，$\therefore a-b+c<0$，即 $a+c<b$，故选项 B 正确。

在选项 C 中，可变形为 $b^2>4ac-8a=4a(c-2)$，由图可得 $c>2$，

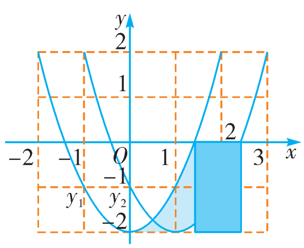
$\therefore c-2>0$，$\therefore 4a(c-2)<0$。$\because b^2>0$，$\therefore b^2>4a(c-2)$，即 $b^2>4ac-8a$，$\therefore b^2+8a>4ac$，故选项 C 正确。

$\because$ 抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}<1$，$\therefore 2a+b<0$，

$\therefore$ 选项 D 错误。故选 D。

5 $y_1>y_2$ 【解析】把 $P(2,y_1)$，$Q(6,y_2)$ 分别代入 $y=3(x-5)^2$，得 $y_1=3\times(2-5)^2=27$，$y_2=3\times(6-5)^2=3$，所以 $y_1>y_2$。

6 2 【解析】如下图所示，



第 6 题图

$\because$ 抛物线 $y_1=x^2-2$ 向右平移 1 个单位长度得到抛物线 y_2，

$\therefore$ 两个顶点的连线平行 x 轴，$\therefore$ 图中阴影部分和图中黑色部分是等底等高的，

$\therefore$ 图中阴影部分等于黑色部分的面积。

而黑色部分的是一个长方形，长、宽分别为 2，1，

$\therefore$ 图中阴影部分的面积 $S=2$。

7 1 【解析】由矩形性质知 $AC=BD$，而 $y=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$，其顶点是 $(1,1)$，当 A 在抛物线顶点处时 AC 最小，故最小值 $BD=AC=1$。

8 解：(1) $\because$ 顶点坐标为 $(4,-3)$，$\therefore$ 可设二次函数的表达式为 $y=a(x-4)^2-3$。又 $\because$ 点 A 的横坐标为 1，纵坐标为 0，$\therefore 0=a(1-4)^2-3$，$\therefore a=\frac{1}{3}$，

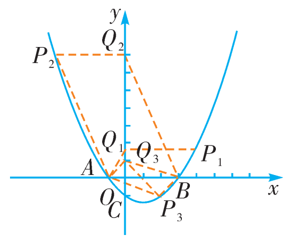
$\therefore y=\frac{1}{3}(x-4)^2-3$，即 $y=\frac{1}{3}x^2-\frac{8}{3}x+\frac{7}{3}$。

(2) 由 (1) 可得当 $x=0$ 时，$y=\frac{7}{3}$，当 $y=0$ 时，

$\frac{1}{3}(x-4)^2-3=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=7$，$\therefore$ 点 C 的坐标为 $\left(0,\frac{7}{3}\right)$，点 B 的坐标为 $(7,0)$，$\therefore OC=\frac{7}{3}$，

$OB=7$，$\therefore \tan\angle ABC=\frac{OC}{OB}=\frac{1}{3}$。

9 解：(1) 设该抛物线的表达式为 $y=a(x+1)(x-3)$。将 $(0,-1)$ 代入，得 $a=\frac{1}{3}$。故表达式为 $y=\frac{1}{3}(x+1)(x-3)$，即 $y=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$。



第 9 题图

(2) 如图所示。

①当 AB 为边时，只要 $PQ/\!/AB$，且 $PQ=AB=4$ 即可。又知点 Q 在 y 轴上，所以点 P 的横坐标为 4 或 -4。这时，符合条件的点 P 有两个，分别记为 P_1，P_2。

而当 $x=4$ 时，$y=\frac{5}{3}$；当 $x=-4$ 时，$y=7$。

此时 $P_1\left(4,\frac{5}{3}\right)$，$P_2(-4,7)$。

②当 AB 为对角线时，只要线段 PQ 与线段 AB 互相平分即可。又知点 Q 在 y 轴上，且线段 AB 中点的横坐标为 1，

所以点 P 的横坐标为 2。这时，符合条件的点 P 只有一个，记为 P_3。而当 $x=2$ 时，$y=-1$，此时 $P_3(2,-1)$。

综上，满足条件的点为 $P_1\left(4,\frac{5}{3}\right)$，$P_2(-4,7)$，$P_3(2,-1)$。

10 解：(1) 由抛物线的对称轴是直线 $x=\frac{7}{2}$，

可设解析式为 $y=a\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+k$。

把 A，B 两点坐标代入上式，

得 $\begin{cases} a\left(6-\frac{7}{2}\right)^2+k=0, \\ a\left(0-\frac{7}{2}\right)^2+k=4。 \end{cases}$

解得 $a=\frac{2}{3}$，$k=-\frac{25}{6}$。

故抛物线解析式为 $y=\frac{2}{3}\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{25}{6}$，顶点为 $\left(\frac{7}{2},-\frac{25}{6}\right)$。

(2)因为点 $E(x,y)$ 在抛物线上，位于第四象限，且坐标适合 $y=\frac{2}{3}\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{25}{6}$，所以 $y<0$，即 $-y>0$，$-y$ 表示点 E 到 OA 的距离。因为 OA 是 ▱$OEAF$ 的对角线，所以 $S=2S_{\triangle OAE}=2\times\frac{1}{2}\times OA\times|y|=-6y=-4\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+25$。

因为抛物线与 x 轴的两个交点是 $(1,0)$ 和 $(6,0)$，所以自变量 x 的取值范围是 $1<x<6$。

①根据题意，当 $S=24$ 时，即 $-4\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+25=24$，化简，得 $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$。解得 $x_1=3$，$x_2=4$。

故所求的点 E 有两个，分别为 $E_1(3,-4)$，$E_2(4,-4)$。

点 $E_1(3,-4)$ 满足 $OE=AE$，所以▱$OEAF$ 是菱形；

点 $E_2(4,-4)$ 不满足 $OE=AE$，所以▱$OEAF$ 不是菱形。

②当 $OA\perp EF$，且 $OA=EF$ 时，▱$OEAF$ 是正方形，此时点 E 的坐标只能是 $(3,-3)$。而坐标为 $(3,-3)$ 的点不在抛物线上，故不存在这样的点 E，使▱$OEAF$ 为正方形。

26.3 实践与探索

拔高题训练 正文 P41

1 B 【解析】$\because AB=x$ m，$\therefore BC=(40-2x)$ m，$\therefore S=x(40-2x)$。

2 B 【解析】设每件降价 x 元，每天获得的利润为 W。根据题意，得 $W=(135-x-100)(100+4x)=-4x^2+40x+3\ 500=-4(x-5)^2+3\ 600$，$\because -4<0$，$\therefore$ 当 $x=5$ 时，W 取得最大值，最大值为 3 600，即每件降价 5 元时，每天获得的利润最大。故选 B。

3 -1 【解析】由图可知，对称轴为直线 $x=1$，二次函数图像与 x 轴的一个交点为 $(3,0)$，根据二次函数图像的对称性知，二次函数的图像与 x 轴的另一个交点为 $(-1,0)$，所以一元二次方程 $-x^2+2x+k=0$ 的另一个解 $x_2=-1$。

4 1 【解析】如图所示，建立平面直角坐标系。

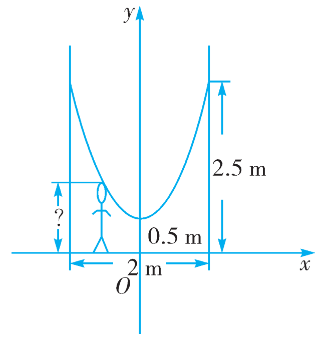
设抛物线的解析式为 $y=ax^2+c$，

则 $\begin{cases}c=0.5,\\a+c=2.5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\c=0.5。\end{cases}$

所以该抛物线的解析式为 $y=2x^2+0.5$，

当 $x=-1+0.5=-0.5$ 时，$y=2\times(-0.5)^2+0.5=1$，

即小明的身高为 1 m。



第 4 题图

5 解：(1)由题意得，函数 y_2 的图像经过两点 $(3,6)$，$(7,7)$，$\therefore \begin{cases}9m-24m+n=6,\\49m-56m+n=7,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\frac{1}{8},\\n=\frac{63}{8}。\end{cases}$

$\therefore y_2$ 的解析式为 $y_2=\frac{1}{8}x^2-x+\frac{63}{8}(1\leqslant x\leqslant 12$，$x$ 是整数)。

(2)设 $y_1=kx+b$。$\because$ 函数 y_1 的图像过两点 $(4,11)$，$(8,10)$，

$\therefore \begin{cases}4k+b=11,\\8k+b=10,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{1}{4},\\b=12。\end{cases}$

$\therefore y_1$ 的解析式为 $y_1=-\frac{1}{4}x+12(1\leqslant x\leqslant 12$，$x$ 是整数)。

设这种水果每千克所获得的利润为 w 元。

则 $w=y_1-y_2=\left(-\frac{1}{4}x+12\right)-\left(\frac{1}{8}x^2-x+\frac{63}{8}\right)=-\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{33}{8}$。

$\therefore w=-\frac{1}{8}(x-3)^2+\frac{21}{4}(1\leqslant x\leqslant 12$，$x$ 是整数)。

$\therefore$ 当 $x=3$ 时，w 取最大值 $\frac{21}{4}$。

$\therefore$ 第 3 月销售这种水果，每千克所获的利润最大，最大利润是 $\frac{21}{4}$ 元/千克。

6 解：(1)由二次函数交点式表达式得 $y=a(x+3)\cdot$

$(x-4)=a(x^2-x-12)$，即 $-12a=4$，解得 $a=-\frac{1}{3}$，则抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+4$。

(2)存在，理由：

点 A,B,C 的坐标分别为 $(-3,0),(4,0),(0,4)$，

则 $AC=5$，$AB=7$，$BC=4\sqrt{2}$，$\angle OAB=\angle OBA=45°$。

将点 B,C 的坐标代入一次函数表达式 $y=kx+b$ 并解得 $y=-x+4$ ①，

同理可得直线 AC 的表达式为 $y=\frac{4}{3}x+4$，

设线段 AC 的中点为 $M\left(-\frac{3}{2},4\right)$，则过点 M 与直线 CA 垂直直线的表达式中 k 的值为 $-\frac{3}{4}$，

同理可得过点 M 与直线 AC 垂直直线的表达式为 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{8}$ ②。

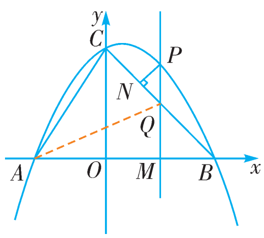
①当 $AC=AQ$ 时，如图，

则 $AC=AQ=5$，

设 $QM=MB=n$，则 $AM=7-n$，

由勾股定理得 $(7-n)^2+n^2=25$，解得 $n=3$ 或 4（舍去 $n=4$），

故点 $Q(1,3)$；



第 6 题图

②当 $AC=CQ$ 时，如图，

$CQ=5$，则 $BQ=BC-CQ=4\sqrt{2}-5$，

则 $QM=MB=\frac{8-5\sqrt{2}}{2}$，

故点 $Q\left(\frac{5\sqrt{2}}{2},\frac{8-5\sqrt{2}}{2}\right)$；

③当 $CQ=AQ$ 时，

联立①②并解得 $x=\frac{25}{2}$（舍去）。

故点 Q 的坐标为 $Q(1,3)$ 或 $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2},\frac{8-5\sqrt{2}}{2}\right)$。

(3)设点 $P\left(m,-\frac{1}{3}m^2+\frac{1}{3}m+4\right)$，则点 $Q(m,-m+4)$。

$\because OB=OC$，$\therefore \angle ABC=\angle OCB=45°=\angle PQN$，

$PN=PQ\sin\angle PQN=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{3}m^2+\frac{1}{3}m+4+m-4\right)=-\frac{\sqrt{2}}{6}m^2+\frac{7\sqrt{2}}{6}m$。$\because -\frac{\sqrt{2}}{6}<0$，$\therefore PN$ 有最大值，当 $m=\frac{7}{2}$ 时，PN 的最大值为 $\frac{49\sqrt{2}}{24}$。

第27章 圆

27.1 圆的认识

拔高题训练

正文 P66

1 A 【解析】$\angle BOC=2\angle A=132°$，而 $OB=OC$，$\therefore \angle OCB=\angle OBC=\frac{1}{2}(180°-132°)=24°$。

2 D 【解析】连接 OB，设 $OB=r$ cm，则 $OE=r-2$，由 $OA\perp BD$ 知 $BE=4$，在 Rt$\triangle OBE$ 中，$BE^2+OE^2=OB^2$，$\therefore 4^2+(r-2)^2=r^2$，解得 $r=5$，$\therefore CE=8$ cm。从而 $BC=\sqrt{BE^2+CE^2}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$(cm)。由 $OF\perp BC$ 知 $CF=\frac{1}{2}BC=2\sqrt{5}$ cm，易证 $\triangle COF\backsim\triangle CBE$，$\therefore \frac{OF}{CF}=\frac{BE}{CE}$，即 $\frac{OF}{2\sqrt{5}}=\frac{4}{8}$，$\therefore OF=\sqrt{5}$ cm。

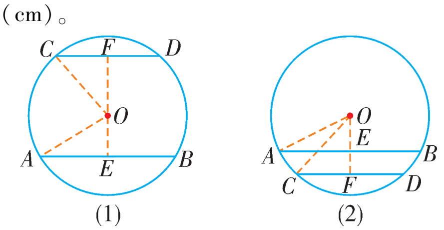
3 D 【解析】在优弧 $\overset{\frown}{BD}$ 上任取一点 P，连接 PB,PD，则 $\angle BPD=180°-\angle BCD=50°$。从而 $\angle BOD=2\angle BPD=100°$。

4 B 【解析】连接 OA,OD,OM，则 $OA=BC=a$，$OD=EF=b$，$OM=HN=c$。而 $OA=OD=OM$，$\therefore a=b=c$。

5 50° 【解析】同弧所对的圆周角等于圆心角的一半。

6 $y=\frac{30}{x}$ 【解析】连接 PO 并延长交 $\odot O$ 于点 N，连接 BN，$\because PN$ 是直径，$\therefore \angle PBN=90°$。$\because AP\perp BC$，$\therefore \angle PAC=90°$，$\therefore \angle BPN=\angle PAC$。又$\because \angle PNB=\angle PCA$，$\therefore \triangle PBN\backsim\triangle PAC$，$\therefore \frac{PB}{PA}=\frac{PN}{PC}$，$\therefore \frac{x}{3}=\frac{10}{y}$，$\therefore y=\frac{30}{x}$。

7 2 或 14 【解析】分两种情况讨论：(1)当弦 AB，CD 位于圆心 O 的两侧时，如图(1)，连接 OA,OC，过点 O 作 $EF\perp AB$，垂足为点 E，交 CD 于点 F，则 $EF\perp CD$，$AE=\frac{1}{2}AB=8$ cm，$CF=\frac{1}{2}CD=6$ cm。在 Rt$\triangle OAE$ 中，$OE=\sqrt{OA^2-AE^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$(cm)。在 Rt$\triangle OCF$ 中，$OF=\sqrt{OC^2-CF^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$(cm)，$\therefore EF=OE+OF=6+8=14$(cm)。



第 7 题图

（2）当弦 AB，CD 位于圆心 O 的同侧时，如图（2），连接 OA，OC，过点 O 作 $EF\perp AB$，垂足为点 E，交 CD 于点 F，同理可求得 $OE=6$ cm，$OF=8$ cm，$\therefore EF=OF-OE=8-6=2$（cm）。综上，弦 AB 和 CD 之间的距离为 2 cm 或 14 cm。

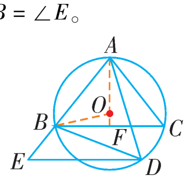
8 $2\sqrt{5}$ 【解析】连 OA，设 $AB=x$，则 $BC=CD=x$，又因为 $\angle POM=45°$，所以 $CD=OC=x$，在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中，因为 $AB^2+OB^2=OA^2$，即 $x^2+(2x)^2=10^2$，解得 $x=2\sqrt{5}$。

9 解：（1）连接 OB。因为 $AB=OC=OB$，
所以 $\angle E=\angle OBE=2\angle A$，则 $\angle DOE=3\angle A=75°$，
所以 $\angle A=25°$。
（2）因为 $\angle E=\angle OBE=2\angle A=40°$，
所以 $\angle EOB=100°$。

10 解：（1）因为 $\angle APD=\angle CAB+\angle C$，
即 $65°=40°+\angle C$，所以 $\angle C=25°$。
而 $\angle B=\angle C$，所以 $\angle B=25°$。
（2）过 O 作 $OE\perp BD$，垂足为点 E，
则 E 为 BD 的中点，且 $OE=3$。
又因为 $OA=OB$，所以 $OE=\dfrac{1}{2}AD$，
故 $AD=2OE=6$。

11 解：P 点位置不随 C 点位置的变化而变化。
连接 OP。
因为 $OC=OP$，所以 $\angle P=\angle OCP$。
因为 $\angle OCP=\angle PCD$，所以 $\angle P=\angle PCD$。
所以 $CD\parallel OP$。
因为 $CD\perp AB$，所以 $OP\perp AB$。
所以 $\overset{\frown}{AP}=\overset{\frown}{PB}$，即 P 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点。
所以 P 点位置不随 C 点位置的变化而变化。

12 解：（1）在 $\triangle ABC$ 中，因为 $AB=AC$，
所以 $\angle ABC=\angle C$。
因为 $DE\parallel BC$，所以 $\angle ABC=\angle E$。
所以 $\angle E=\angle C$。
又因为 $\angle ADB=\angle C$，所以 $\angle ADB=\angle E$。
（2）如图，连接 BO，AO，并延长 AO 交 BC 于点 F，则 $AF\perp BC$，
且 $BF=\dfrac{1}{2}BC=3$。



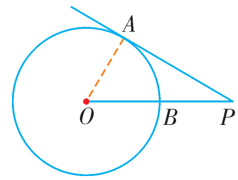
第 12 题图

因为 $AB=5$，所以 $AF=4$。
设 $\odot O$ 的半径为 r，
在 $\mathrm{Rt}\triangle OBF$ 中，$OF=4-r$，$OB=r$，$BF=3$，
所以 $r^2=3^2+(4-r)^2$，解得 $r=\dfrac{25}{8}$。
所以 $\odot O$ 的半径是 $\dfrac{25}{8}$。

27.2 与圆有关的位置关系

拔高题训练 正文 P81

1 A 【解析】如图所示，连接 OA，



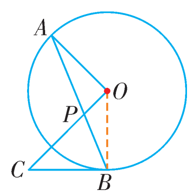
第 1 题图

$\because PA$ 为 $\odot O$ 的切线，$\therefore OA\perp AP$。又 $\because OB=3$，$\therefore OA=OB=3$。在 $\mathrm{Rt}\triangle AOP$ 中，$\because \angle P=30°$，$\therefore OA=\dfrac{1}{2}OP=3$，$\therefore OP=6$，$\therefore PB=OP-OB=6-3=3$。

2 D 【解析】由 BC 是 $\odot O$ 的切线，得 $\angle ABC=90°$。又 $\angle ACB=50°$，$\therefore \angle BAC=40°$。又 $OA=OD$，$\therefore \angle ODA=\angle BAC=40°$，$\therefore \angle BOD=\angle BAD+\angle ODA=40°+40°=80°$。

3 B 【解析】设圆心为 O，连 OA，OB，由切线性质及切线长性质可知 $OB\perp AB$，$\angle OAB=60°$，从而 $OB=AB\cdot\tan 60°=3\sqrt{3}$。

4 44 【解析】如图所示，连接 OB，$\because OA=OB$，$\therefore \angle OAB=\angle OBA=22°$，$\therefore \angle AOB=180°-22°-22°=136°$。$\because OC\perp OA$，$\therefore \angle BOC=136°-90°=46°$。$\because BC$ 是 $\odot O$ 上过点 B 的切线，$\therefore \angle OBC=90°$，$\therefore \angle OCB=90°-46°=44°$。



第 4 题图

5 $70°$ 【解析】$\because \triangle ABC$ 的内切圆 $\odot O$ 与 BC 边相切于点 D，$\therefore BO$ 平分 $\angle ABC$，$OD\perp BC$，$\therefore \angle OBD=\dfrac{1}{2}\angle ABC=\dfrac{1}{2}\times 40°=20°$。$\angle BOD=90°-\angle OBD=70°$。

6 $<$ 【解析】过 P 分别作 $PD\perp AB$，垂足为 D，$PE\perp BC$，垂足为 E，$PF\perp AC$，垂足为 F。$\because P$ 是 $\triangle ABC$ 的内心，$\therefore PD=PE=PF$，而 $S_1=\dfrac{1}{2}AB\cdot PD$，$S_2=\dfrac{1}{2}BC\cdot PE$，$S_3=\dfrac{1}{2}AC\cdot PF$，而 $AB<BC+AC$，$\therefore S_1<S_2+S_3$。

7 （1）证明：连接 AD，
$\because AB=AC$，$\angle BAC=120°$，$\therefore \angle B=\angle C=30°$，$\because AD=BD$，$\therefore \angle BAD=\angle B=30°$，$\therefore \angle ADC=60°$，$\therefore \angle DAC=180°-60°-30°=90°$，$\therefore AC$ 是 $\odot D$ 的切线。
（2）解：连接 AE，$\because AD=DE$，$\angle ADE=60°$，

$\therefore \triangle ADE$ 是等边三角形，$\therefore AE=DE$，$\angle AED=60°$，$\therefore \angle EAC=\angle AED-\angle C=30°$，$\therefore \angle EAC=\angle C$，$\therefore AE=CE=2\sqrt{3}$，$\therefore \odot D$ 的半径 $AD=2\sqrt{3}$。

8 解：根据切线长定理知：$EA=EC$，$FB=FC$，$PA=PB$。所以 $\triangle PEF$ 的周长为 $PE+PF+EF=PE+EC+PF+FC=PE+EA+PF+FB=2PA=2\times8=16(\text{cm})$。

9 (1)证明：连接 OM，则 $OM=OB$。所以 $\angle OMB=\angle OBM$。

因为 BM 平分 $\angle ABC$，所以 $\angle ABM=\angle CBM$。所以 $\angle OMB=\angle CBM$。所以 $OM /\!/ BC$。所以 $\angle AMO=\angle AEB$。

在 $\triangle ABC$ 中，因为 $AB=AC$，AE 是 $\angle CAB$ 的平分线，所以 $AE\perp BC$。所以 $\angle AEB=90°$。所以 $\angle AMO=90°$。所以 $OM\perp AE$。所以 AE 与 $\odot O$ 相切。

(2)解：在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AE 是 $\angle CAB$ 的平分线，

所以 $BE=\frac{1}{2}BC$，$\angle ABC=\angle C$。

因为 $BC=4$，$\cos C=\frac{1}{3}$，

所以 $BE=2$，$\cos\angle ABC=\frac{1}{3}$。

在 $\triangle ABE$ 中，$\angle AEB=90°$，

所以 $AB=\frac{BE}{\cos\angle ABC}=6$。

设 $\odot O$ 的半径为 r，则 $AO=6-r$。

因为 $OM /\!/ BC$，所以 $\triangle AOM\backsim\triangle ABE$。

所以 $\frac{OM}{BE}=\frac{AO}{AB}$。所以 $\frac{r}{2}=\frac{6-r}{6}$。

解得 $r=\frac{3}{2}$。所以 $\odot O$ 的半径为 $\frac{3}{2}$。

10 解：(1)直线 AB 与 $\odot P$ 相切。

理由如下：过 P 作 $PD\perp AB$，垂足为 D。

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，

因为 $AC=6\ \text{cm}$，$BC=8\ \text{cm}$，

所以 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=10\ \text{cm}$。

因为 P 为 BC 中点，所以 $PB=4\ \text{cm}$。

因为 $\angle PDB=\angle ACB=90°$，$\angle PBD=\angle ABC$，

所以 $\triangle PBD\backsim\triangle ABC$。

所以 $\frac{PD}{AC}=\frac{PB}{AB}$，即 $\frac{PD}{6}=\frac{4}{10}$。所以 $PD=2.4\ \text{cm}$。

当 $t=1.2$ 时，$PQ=2t=2.4\ \text{cm}$，

所以 $PD=PQ$，即圆心 P 到直线 AB 的距离等于 $\odot P$ 的半径。

所以直线 AB 与 $\odot P$ 相切。

(2)因为 $\angle ACB=90°$，所以 AB 为 $\triangle ABC$ 的外接圆的直径。所以 $OB=\frac{1}{2}AB=5\ \text{cm}$。连接 OP。因为 P 为 BC 中点，

所以 OP 为 $\triangle ABC$ 的中位线。

所以 $OP=\frac{1}{2}AC=3\ \text{cm}$。

因为点 P 在 $\odot O$ 内部，所以 $\odot P$ 与 $\odot O$ 只能内切。

所以 $5-2t=3$ 或 $2t-5=3$。所以 $t=1$ 或 $t=4$。

所以 $\odot P$ 与 $\odot O$ 相切时，t 的值为 1 或 4。

27.3 圆中的计算问题

拔高题训练 正文 P91

1 C 【解析】该扇形的面积 $=\frac{120\cdot\pi\cdot6^2}{360}=12\pi$。

2 A 【解析】由正方形的特征可知 $\angle BAD=90°$，$AO\perp BD$，$AO=BO=DO=2$，再由正方形与圆的轴对称性可知 $S_{弓形AB}=S_{弓形BC}$，$S_{弓形AD}=S_{弓形CD}$，所以阴影部分的面积 $=S_{扇形AEF}-S_{\triangle ABD}=\frac{90\pi\times4^2}{360}-\frac{1}{2}\times4\times2=4\pi-4$。

3 $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ 【解析】$\because$ 点 $A(1,1)$，$\therefore OA=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，点 A 在第一象限的角平分线上。$\because$ 以点 O 为旋转中心，将点 A 逆时针旋转到点 B 的位置，$\therefore \angle AOB=45°$，$\therefore \overset{\frown}{AB}$ 的长为 $\frac{45\pi\times\sqrt{2}}{180}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$。

4 9 420 【解析】将 $\triangle C'AD'$ 逆时针旋转 $90°$ 后与 $\triangle CAD$ 重合，则阴影部分的面积就转化为两个扇形面积的差。

5 (1)证明：连接 OB 交 AC 于 E，$\because \angle BCA=30°$，$\therefore \angle AOB=60°$。在 $\triangle AOE$ 中，$\because \angle OAC=30°$，$\therefore \angle OEA=90°$，$\therefore OB\perp AC$。$\because BD /\!/ AC$，$\therefore OB\perp BD$，而 B 在圆上，$\therefore BD$ 为圆的切线。

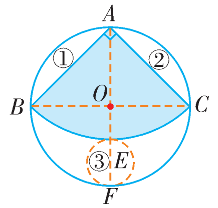
(2)$\because$ 圆的半径为 8，$\therefore OA=OB=8$。在 $\triangle AOC$ 中，$\angle OAC=\angle OCA=30°$，$\angle COA=120°$，$\therefore AC=8\sqrt{3}$。$\because \angle BCA=\angle OAC=30°$，$\therefore OA /\!/ BC$，而 $BD /\!/ AC$，$\therefore$ 四边形 $ACBD$ 为平行四边形，$\therefore BD=8\sqrt{3}$，$\therefore \triangle OBD$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times8\times8\sqrt{3}=32\sqrt{3}$，扇形 OAB 的面积为 $\frac{1}{6}\times\pi\times8^2=\frac{32\pi}{3}$，$\therefore$ 阴影部分的面积为 $32\sqrt{3}-\frac{32\pi}{3}$。

6 解：(1)①如图所示，连接 BC，

$\because$ 由勾股定理，得 $AB^2+AC^2=BC^2$，

$\therefore AB^2+AC^2=(4\sqrt{2})^2$，

$\therefore AB=AC=4$。$\therefore$ 扇形 ABC 的面积为 $S=\frac{n\pi R^2}{360}=\frac{90\pi\times4^2}{360}=4\pi$。



第 6 题图

②如图所示，连接 AO 并延长，

与$\overset{\frown}{BC}$交于点 E，与⊙O 交于点 F，

$\because AE=AB=4$，$\therefore EF=AF-AE=4\sqrt{2}-4$，

$\overset{\frown}{BC}$的长 $l=\dfrac{90\pi\cdot AC}{180}=2\pi$。

$\because 2\pi r=2\pi$，$\therefore r=1$，$\therefore$ 圆锥的底面直径为 $2r=2$，得 $EF<2r$。

$\therefore$ 不能在余料③中剪出一个圆作为底面与此扇形围成圆锥。

(2)所剪扇形的圆心角 $n=120°$，圆锥的母线长为 $2\sqrt{2}$，底面圆的半径为$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$。

27.4 正多边形和圆

拔高题训练 正文 P99

1 C 【解析】$\because$ 五边形 $ABCDE$ 是正五边形，

$\therefore \angle ABC=\angle C=108°$。而 $\angle CBD=\angle CDB=36°$，

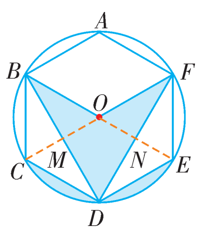
$\therefore \angle ABD=\angle ABC-\angle CBD=108°-36°=72°$。

2 D 【解析】AB 是直角边时，点 C 有 6 个位置，即有 6 个直角三角形；AB 是斜边时，点 C 共有 4 个位置，故使△ABC 是直角三角形的点 C 的个数是 $6+4=10$。

3 3π 【解析】如图，连接 OC，OE，分别交 BD，DF 于点 M，N。

$\because$ 正六边形 $ABCDEF$ 内接于⊙O，

$\therefore \angle BOC=60°$，$\angle BCD=\angle COE=120°$。



第 3 题图

$\because OB=OC$，

$\therefore$ △OBC 是等边三角形，

$\therefore \angle OBC=\angle OCB=60°$，

$\therefore \angle OCD=\angle OCB$。

$\because BC=CD$，

$\therefore \angle CBD=\angle CDM=30°$，$BM=DM$，

$\therefore \angle OBM=30°$，$S_{\triangle DCM}=S_{\triangle BCM}$，

$\therefore \angle OBM=\angle CBD$，

$\therefore OM=CM$，

$\therefore S_{\triangle OBM}=S_{\triangle BCM}$，

$\therefore S_{\triangle OBM}=S_{\triangle DCM}$。

同理，$S_{\triangle OFN}=S_{\triangle DEN}$，

$\therefore S_{阴影}=S_{扇形OCE}=\dfrac{120\times\pi\times 3^2}{360}=3\pi$。

4 $3^{n-1}\cdot\sqrt{3}$ 【解析】由题意易得，△OA_1F_1 是等边三角形，所以 $OA_1=A_1F_1=A_1B_1=1$，所以 $OB_1=2$，所以点 B_1 到 ON 的距离是 $2\cdot\sin 60°=\sqrt{3}=3^0\cdot\sqrt{3}$，同理可得，点 B_2 到 ON 的距离是 $6\cdot\sin 60°=3\sqrt{3}=3^1\cdot\sqrt{3}$，点 B_3 到 ON 的距离是 $18\cdot\sin 60°=9\sqrt{3}=3^2\cdot\sqrt{3}$，点 B_4 到 ON 的距离是 $27\sqrt{3}=3^3\cdot\sqrt{3}$，……，此规律，可得点 B_n 到 ON 的距离是 $3^{n-1}\cdot\sqrt{3}$。

5 解：(1)如图(1)，连接 OB，OC，

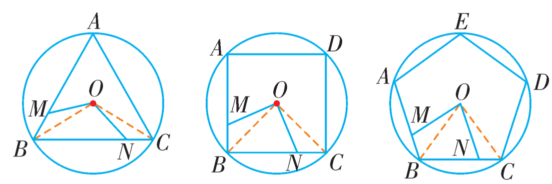
易知 $\angle BOC=\dfrac{360°}{3}=120°$，$\angle OBM=\angle OCN=30°$。

又 $\because BM=CN$，$OB=OC$，$\therefore$ △BOM≌△CON，

$\therefore \angle BOM=\angle CON$，

$\therefore \angle BON+\angle BOM=\angle BON+\angle CON$，

$\therefore \angle MON=\angle BOC=120°$。



(1) (2) (3)

第 5 题图

(2)90° (3)72°

【解析】如图(2)，连接 OB，OC，易证△BOM≌△CON，

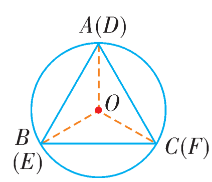
$\therefore \angle BOM=\angle CON$，$\therefore \angle MON=\angle BOC=90°$。

如图(3)，连接 OB，OC，易证△BOM≌△CON，

$\therefore \angle MON=\angle BOC=\dfrac{360°}{5}=72°$。

(4)$\angle MON=\dfrac{360°}{n}(n\geqslant 3)$。

6 解：(1)方案一：D，E，F 分别与 A，B，C 重合，连接 OD，OE，OF 可得三条小路(如图①)。



第 6 题图①

方案二：过 O 分别作 AB，BC，CA 的垂线，垂足分别为 D，E，F，从而得到 OD，OE，OF 三条小路(如图②)。

(2)三条小路 OD，OE，OF 分别与 AC，AB，BC 平行时，可得到三个全等的等腰梯形。

如图③，作 $OM\perp BC$，垂足为点 M，连接 OB。

在 Rt△BOM 中，$\angle OBM=30°$，$BM=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}\times$

$60=30(\text{m})$。

因为 $OB=2OM$,$BM^2+OM^2=OB^2$,

所以 $30^2+OM^2=(2OM)^2$,$3OM^2=900$,

所以 $OM=10\sqrt{3}(\text{m})$。

在 $\text{Rt}\triangle OEM$ 中,$\angle OEM=\angle ABC=60°$,

所以 $\angle EOM=30°$,$EM=\frac{1}{2}OE$。

因为 $EM^2+OM^2=OE^2$,

所以 $\left(\frac{1}{2}OE\right)^2+(10\sqrt{3})^2=OE^2$,

所以 $\frac{3}{4}OE^2=100\times3$,所以 $OE=20(\text{m})$。

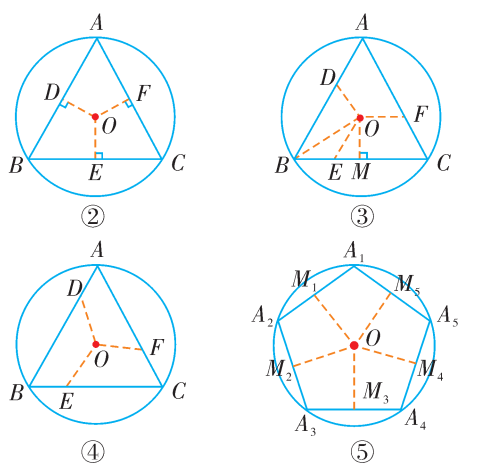
又因为 $OE=OF=OD$,

所以三条小路的总长为 $3OE=3\times20=60(\text{m})$。

(3)方法一:如图④,在 BC,CA 上截取 BE,CF,使得 $BE=CF=AD$,连接 OE,OF 而得到另外两个出口。

方法二:根据等边三角形绕其中心旋转 120°后能与原三角形重合和圆的旋转不变性,连接 OD,将 OD 逆时针旋转 120°,交 BC 于点 E,再逆时针旋转 120°,交 AC 于点 F,得到另外两个出口。

(4)如图⑤,设 M_1 为 A_1A_2 上任意一点,在各边上分别截取 $A_2M_2=A_3M_3=A_4M_4=A_5M_5=A_1M_1$,连接 OM_1,OM_2,OM_3,OM_4,OM_5 即可得五条小路,这种方法能推广到一般正 n 边形。



第 6 题图

第28章 样本与总体

28.1 抽样调查的意义

拔高题训练 正文 P114

1 B

2 C 【解析】抽取的样本应该是 $40\times30=1\ 200$(名)九年级学生的数学成绩,故 C 选项是错误的,符合题意,故选 C。

3 不可靠 由于选择的样本在同一个城市,太片面,所以调查不具有代表性,宣传中的数据不可靠。

4 3 25 【解析】平均每个家庭一天丢弃塑料袋的个数是 $\frac{1}{25}[2\times10+3\times8+4\times3+5\times2+6\times2]\approx3$。

5 解:C 方案比较合理,理由如下:

A 方案中的少年体校篮球、排球队员的身高都比较高,得到的数据太特殊,不具有代表性。

B 方案中未考虑异地间的差异,所选取的样本不具有广泛性。

C 方案比较合理,因为采用了随机抽取样本的方法,选取的样本具有代表性,可以用来估计本市初中男生的身高。此方案更具有代表性、广泛性和科学性。

6 解:(1)4%

(2)$92.1\times52\%+85.0\times26\%+69.2\times18\%+41.3\times4\%=84.1$。

(3)设总人数为 n,因为 $80.0\leqslant41.3\times n\times4\%\leqslant89.9$,所以 $48<n<54$。又因为 $4\%\ n$ 为整数,所以 $n=50$,即优秀的学生有 $52\%\times50\div10\%=260$(人)。

28.2 用样本估计总体

拔高题训练 正文 P122

1 D 【解析】选项 A 中,男性老人没有被抽到的可能,不合理;选项 B 中,女性老人没有被抽到的可能,不合理;选项 C 中,公园外的老人没有被抽到的可能,不合理;选项 D 中,在城市和乡镇各选 10 个点,每个点任选 5 位老人,这种抽取老人的方法使得该市每位老人均有被抽到的可能,故最合适。

2 A 【解析】样本中有记号的鱼所占的比例为 $\frac{2}{50}$。由样本估计总体,可以估计这个鱼塘鱼的数量为 $50\div\frac{2}{50}=1\ 250$(条)。

3 ①④ 【解析】①是等距抽样,④是随机抽样。

4 6 000 【解析】从条形统计图可得选择自驾前往的人数是 4 800,从扇形统计图可得选择自驾前往的人数占总人数的 40%,所以调查的总人数为 $4\ 800\div40\%=12\ 000$,所以选择公交前往的人数是 $12\ 000\times50\%=6\ 000$。

5 (1)$\because(20+23+26+25+29+28+30+25+21+$

23）÷10＝25（人），∴ 这 10 个班次乘车人数的平均数为 25。

（2）如果在高峰时段从总站共发车 60 个班次。根据上面的计算结果，估计在高峰时段从总站乘该路车出行的乘客共有 25×60＝1 500（人）。

6 （1）由图表可知，$a=4$。

（2）设这周该年级收集的可回收垃圾被回收后所得金额为 w 元，则 $w<(2\times4.5+4\times5.0+3\times5.5+1\times6.0)\times0.8=41.2<50$。所以这周该年级收集的可回收垃圾被回收后所得金额达不到 50 元。

28.3 借助调查做决策

拔高题训练

正文 P132

1 D 【解析】甲车间生产的合格品所占的比例为 80%，乙车间生产的合格品所占的比例为 85%。因为不知道每个车间生产的产品总量，所以无法判断两车间生产的合格品的数量关系。

2 D 【解析】由题意知，被调查的学生人数为 60÷15%＝400，∴ 选项 A 正确；∵ 扇形统计图中 A 所占的百分比为 $\frac{40}{400}\times100\%=10\%$，$D$ 所占的百分比为 $\frac{100}{400}\times100\%=25\%$，∴ 扇形统计图中 E 所占的百分比为 $1-(17.5\%+10\%+15\%+12.5\%+25\%)=20\%$，∴ 扇形统计图中 E 部分扇形的圆心角为 $360°\times20\%=72°$，∴ 选项 B 正确；被调查的学生中最喜欢选修课 E 的人数为 $400\times20\%=80$，被调查的学生中最喜欢选修课 F 的人数为 $400\times17.5\%=70$，∴ 选项 C 正确；∵ 12.5%＞10%，∴ 最喜欢选修课 A 的人数最少，∴ 选项 D 错误。

3 2016　2015 【解析】由条形统计图可知，该市私人汽车拥有量年净增量最多的是 2016 年，净增 183－150＝33（万辆）。由折线统计图可知，私人汽车拥有量年增长率最大的是 2015 年。

4 解：

表一

质量/g 频数 种类	$393\le x<396$	$396\le x<399$	$399\le x<402$	$402\le x<405$	$405\le x<408$	$408\le x<411$
甲	3	0	3	0	1	3
乙	0	3	1	5	1	0

表二

种类	平均数	中位数	众数	方差
甲	401.5	400	400	36.85
乙	400.8	402	402	8.56

甲，理由：从中位数（众数）角度说，甲的中位数（众数）为标准质量 400 g。

乙，理由：从方差角度说，乙的方差小，分装情况更稳定。

从平均数角度说，乙的平均数更接近标准质量 400 g。

5 （1）①108°　②9　6

（2）10×25%＋8×45%＋5×30%＝7.6（万元）。

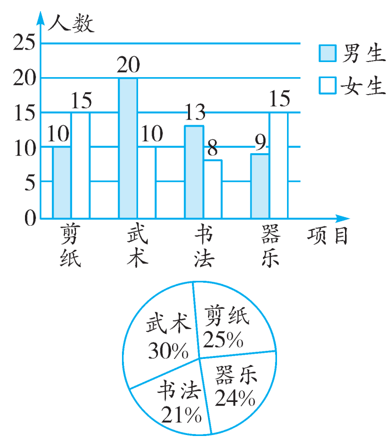
答：这个公司平均每人所创年利润为 7.6 万元。

【解析】（1）①C 部门所对应的圆心角的度数为 360°×30%＝108°；

②首先利用扇形图确定 A 部门人数所占的百分比，然后利用 A 部门的人数求出总人数，再依据总人数和 B，C 部门人数所占的百分比求出对应的人数。因为各部门的总人数为 5÷(1－30%－45%)＝20，所以 $b=20\times45\%=9$，$c=20\times30\%=6$。

（2）利用加权平均数的计算公式进行计算求值。

6 （1）补全统计图如图所示。



第 6 题图

（2）$\frac{10}{10+15}\times100\%=40\%$。

答：男生所占的百分比是 40%。

（3）500×21%＝105（人）。

答：估计其中参加“书法”活动项目的有 105 人。

（4）$\frac{15}{15+10+8+15}=\frac{15}{48}=\frac{5}{16}$。

答：正好抽到参加“器乐”活动项目的女生的概率是 $\frac{5}{16}$。