答案与解析

第16章 二次根式

16.1 二次根式

变式题型

1 A 【解析】∵代数式$\sqrt{2-3x}$有意义，∴$2-3x\geq0$，解得$x\leq\frac{2}{3}$。故选A。

2 D 【解析】由题意可知$\begin{cases}m+2\geq0,\\ m-1\neq0,\end{cases}$∴$m\geq-2$且$m\neq1$，故选D。

3 $2\,016^2+3\times2\,016+1$ 【解析】分别观察被开方数中各项的特点和开方后各项的特点，直接写出答案。

4 解：(1)由二次根式的定义，得$14-n\geq0$，所以$n\leq14$。因为n为自然数，所以$0\leq n\leq14$。因为$\sqrt{14-n}$是整数，所以$14-n$是完全平方数。因为在0～14内的完全平方数有0，1，4，9，所以自然数n所有可能的值为14，13，10，5。

(2)因为$\sqrt{20n}$是整数，所以$20n$是完全平方数。因为$20n=2^2\times5n$，所以当$\sqrt{20n}$是整数时，正整数n的最小值为5。

5 A 【解析】由题意可知$\begin{cases}1-2x\geq0,\\ x\neq0,\end{cases}$解得$x\leq\frac{1}{2}$且$x\neq0$，故选A。

6 -3 【解析】由题意可知$\begin{cases}x-\frac{1}{2}\geq0,\\ \frac{1}{2}-x\geq0,\end{cases}$解得$x=\frac{1}{2}$，

∴$y=0+0-6=-6$，∴$xy=-3$，故答案为：-3。

拔高题训练 正文P11

1 D 【解析】因为$y=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}+10$，所以$\begin{cases}x-1\geq0,\\ 1-x\geq0,\end{cases}$即$\begin{cases}x\geq1,\\ x\leq1,\end{cases}$解得$x=1$，所以$y=10$，所以$\frac{2x+y}{5x-2y}=\frac{2+10}{5-20}=-\frac{12}{15}=-\frac{4}{5}$。故选D。

2 C 【解析】∵代数式$\frac{\sqrt{3x-2}}{|x|-3}$有意义，∴$3x-2\geq0$，$|x|-3\neq0$，解得$x\geq\frac{2}{3}$且$x\neq3$。故选C。

3 2 020 【解析】∵$|2\,019-m|+\sqrt{m-2\,020}=m$，∴$m-2\,020\geq0$，$m\geq2\,020$。由题意，得$m-2\,019+\sqrt{m-2\,020}=m$。化简，得$\sqrt{m-2\,020}=2\,019$，两边平方，得$m-2\,020=2\,019^2$，即$m-2\,019^2=2\,020$，故答案为：2 020。

4 1 【解析】要使代数式有意义，则$\begin{cases}a-2\,020\geq0,\\ 2\,020-a\geq0,\end{cases}$解得$a=2\,020$，故$m=0$，∴$a^m=2\,020^0=1$，故答案为：1。

5 解：由题意得$3-x\geq0$，$2x-6\geq0$，解得$x=3$，则$y=4$。当腰长为3，底边长为4时，三角形的周长为$3+3+4=10$；当腰长为4，底边长为3时，三角形的周长为$3+4+4=11$。

答：此三角形的周长为10或11。

6 解：(1)由$\begin{cases}x-3\geq0,\\ 3-x\geq0\end{cases}$解得$x=3$，∴$y>2$。

∴$\frac{|1-y|}{y-1}=\frac{y-1}{y-1}=1$。

(2)由$\begin{cases}2x-2\geq0,\\ 1-x\geq0\end{cases}$解得$x=1$，∴$y=-2$。

∴$\sqrt{y^2+5x}=\sqrt{(-2)^2+5\times1}=3$。

16.2 二次根式的乘除

变式题型

1 解：(1)原式$=\sqrt{\frac{5}{2}}\times\frac{1}{3\sqrt{28}}\times\left(-5\sqrt{\frac{16}{7}}\right)=-\frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{2}\times\frac{1}{28}\times\frac{16}{7}}=-\frac{5}{3}\sqrt{\frac{10}{49}}=-\frac{5}{3}\times\frac{1}{7}\sqrt{10}=-\frac{5}{21}\sqrt{10}$。

(2)原式$=2\sqrt{\frac{a^2-b^2}{6a}}\cdot\sqrt{\frac{a}{3(a+b)}}\cdot\frac{5}{4}\sqrt{\frac{b}{a-b}}=2\times\frac{5}{4}\sqrt{\frac{(a+b)(a-b)}{6a}\cdot\frac{a}{3(a+b)}\cdot\frac{b}{a-b}}=\frac{5}{2}\sqrt{\frac{b}{18}}=\frac{5}{2}\times\frac{1}{6}\sqrt{2b}=\frac{5}{12}\sqrt{2b}$。

2 解：(1)$\sqrt{360}=6\sqrt{10}=6\sqrt{\frac{20}{2}}=\frac{6\sqrt{20}}{\sqrt{2}}$。因为$\sqrt{2}=a$，$\sqrt{20}=b$，所以$\sqrt{360}=\frac{6b}{a}$。

(2)$\sqrt{2.7}=\sqrt{0.09\times30}=0.3\sqrt{30}\approx0.3\times5.477=1.643\,1$。

3 解：(1)$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$。

(2)原式$=|(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{3}-\sqrt{2})|+|(\sqrt{3}-\sqrt{2})-(\sqrt{4}-\sqrt{3})|+|(\sqrt{4}-\sqrt{3})-(\sqrt{5}-\sqrt{4})|+\cdots+|(\sqrt{100}-\sqrt{99})-(\sqrt{101}-\sqrt{100})|=(\sqrt{2}-1)-$

$(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})-(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})-(\sqrt{5}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})-(\sqrt{101}-\sqrt{100})=(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{101}-\sqrt{100})=\sqrt{2}-1-\sqrt{101}+10=\sqrt{2}-\sqrt{101}+9$。

拔高题训练 正文 P22

1 C 【解析】根据算术平方根的意义可知 $b-a\geqslant 0$ 且 $x\geqslant 0$,即 $a\leqslant b,x\geqslant 0$。故选 C。

2 C

3 $\sqrt{n+1}-1$ 【解析】$\because$ 第 1 个等式:$a_1=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$,第 2 个等式:$a_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$,第 3 个等式:$a_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}=2-\sqrt{3}$,第 4 个等式:$a_4=\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2,\cdots$,$\therefore$ 第 n 个等式:$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$($n$ 为正整数),$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-1$,故答案为:$\sqrt{n+1}-1$。

4 1 2 【解析】$\because \sqrt{2^{m+n-2}}$ 和 $\sqrt{3^{3m-2n+2}}$ 都是最简二次根式,$\therefore \begin{cases}m+n=3①,\\3m-2n=-1②,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=1,\\n=2,\end{cases}$ 故答案为:1;2。

5 解:(1) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5-2\sqrt{5}+1}=\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=\sqrt{5}-1$。

(2) $a=m+n,b=mn$,理由:$\because \sqrt{a+2\sqrt{b}}=\sqrt{m}+\sqrt{n}$,$\therefore a+2\sqrt{b}=m+2\sqrt{mn}+n$,$\therefore a=m+n,b=mn$。

(3) $\because x=\sqrt{4-\sqrt{12}}=\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{3}-1$,$\therefore \left(\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}\right)\cdot\dfrac{x^2-4}{2(x-1)}=\dfrac{x+2+x-2}{(x-2)(x+2)}\cdot\dfrac{(x-2)(x+2)}{2(x-1)}=\dfrac{2x}{(x-2)(x+2)}\cdot\dfrac{(x-2)(x+2)}{2(x-1)}=\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1-1}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-2}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}=-1-\sqrt{3}$。

6 解:不正确,根据题意,要使 $\sqrt{-a^3}$ 和 $\sqrt{-\dfrac{1}{a}}$ 有意义,则 a 为负数,则 $\sqrt{-a^3}-a\sqrt{-\dfrac{1}{a}}=-a\sqrt{-a}+a\cdot\dfrac{1}{a}\sqrt{-a}=(1-a)\sqrt{-a}$。

16.3 二次根式的加减

变式题型

1 解:(1)原式 $=\sqrt{18}+\sqrt{24}=3\sqrt{2}+2\sqrt{6}$。

(2)原式 $=4\sqrt{3}\div\sqrt{3}-3\sqrt{6}\div\sqrt{3}=4-3\sqrt{2}$。

(3)原式 $=4^2-(\sqrt{15})^2=16-15=1$。

(4)原式 $=2^2-2\times2\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}$。

(5)原式 $=(2\sqrt{3})^2+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=14+4\sqrt{6}$。

2 解:因为 $a=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=\dfrac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)\times(\sqrt{5}+2)}=\sqrt{5}+2$,

$b=\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}=\dfrac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)\times(\sqrt{5}-2)}=\sqrt{5}-2$,

所以 $\sqrt{a^2+b^2+2}=\sqrt{(a+b)^2-2ab+2}$

$=\sqrt{(\sqrt{5}+2+\sqrt{5}-2)^2-2\times(\sqrt{5}+2)\times(\sqrt{5}-2)+2}$

$=\sqrt{20-2+2}=2\sqrt{5}$。

3 解:原式 $=\dfrac{(a-1)^2}{a-1}-\dfrac{\sqrt{(a-1)^2}}{a(a-1)}=a-1-\dfrac{|a-1|}{a(a-1)}$。因为 $a=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}<1$,所以 $a-1<0$,所以原式 $=a-1-\dfrac{1-a}{a(a-1)}=a+\dfrac{1}{a}-1=2-\sqrt{3}+\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}-1=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}-1=3$。

4 解:(1)可以发现 $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ 与 $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ 互为倒数,即 $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$($n$ 为正整数)。

(2)由(1),得 $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1,\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2},\cdots,\dfrac{1}{\sqrt{2\,020}+\sqrt{2\,019}}=\sqrt{2\,020}-\sqrt{2\,019}$,所以 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2\,020}+\sqrt{2\,019}}\right)(1+\sqrt{2\,020})=[(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{2\,020}-\sqrt{2\,019})](1+\sqrt{2\,020})=(\sqrt{2\,020}-1)(\sqrt{2\,020}+1)=(\sqrt{2\,020})^2-1^2=2\,020-1=2\,019$。

拔高题训练 正文 P29

1 D 【解析】原式 $=[(\sqrt{3}-2)\cdot(\sqrt{3}+2)]^{2\,019}\cdot(\sqrt{3}+2)=(3-4)^{2\,019}\cdot(\sqrt{3}+2)=-\sqrt{3}-2$。故选 D。

2 C 【解析】把 $x=2-\sqrt{3}$ 代入代数式 $(7+4\sqrt{3})x^2+(2+\sqrt{3})x+\sqrt{3}$ 得 $(7+4\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^2+(2+\sqrt{3})\times(2-\sqrt{3})+\sqrt{3}=(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})+4-3+\sqrt{3}=49-48+1+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$。故选 C。

3 1 【解析】$\because S=\sqrt{\dfrac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]}$,$\therefore$ 若 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 $1,2,\sqrt{5}$,则 $\triangle ABC$ 的面积为 $S=\sqrt{\dfrac{1}{4}\left\{1^2\times2^2-\left[\dfrac{1^2+2^2-(\sqrt{5})^2}{2}\right]^2\right\}}=1$,故答案为:1。

4 $\sqrt{6}-\frac{3\sqrt{2}}{4}$ 【解析】原式 $=2\sqrt{6}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}-\sqrt{6}=\sqrt{6}-\frac{3\sqrt{2}}{4}$,故答案为:$\sqrt{6}-\frac{3\sqrt{2}}{4}$。

5 解:∵ $\begin{cases}x=2,\\y=\sqrt{3}\end{cases}$是关于 x,y 的二元一次方程$\sqrt{3}x=y+a$的解,∴ $2\sqrt{3}=\sqrt{3}+a,a=\sqrt{3}$,∴ $(a+1)(a-1)+7=a^2-1+7=3-1+7=9$。

6 解:(1)当 $x=3$ 时,$\sqrt{2x^2+2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$。

(2)∵ 若 x 是正数,$\sqrt{2x^2+2}\geqslant0$ 且是整数,

∴ 当 $x=1$ 时,$\sqrt{2x^2+2}=2$,∴ x 的最小值是 1。

(3)∵ $\sqrt{2x^2+2}$和$\sqrt{x^2+x+4}$是两个最简二次根式,且被开方数相同,∴ $2x^2+2=x^2+x+4$,整理得 $x^2-x-2=0$,解得 $x_1=-1$(不合题意,舍去),$x_2=2$。

7 解:由已知可知 $\sqrt{120\sqrt{6}+540\sqrt{10}+144\sqrt{15}+2\,118}=a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{5}$($a,b,c$ 为正整数),所以 $120\sqrt{6}+540\sqrt{10}+144\sqrt{15}+2\,118=(a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{5})^2$,即 $120\sqrt{6}+540\sqrt{10}+144\sqrt{15}+2\,118=2a^2+3b^2+5c^2+2\sqrt{6}ab+2\sqrt{10}ac+2\sqrt{15}bc$,

所以$\begin{cases}2a^2+3b^2+5c^2=2\,118,\\2ab=120,\\2ac=540,\\2bc=144,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=15,\\b=4,\\c=18,\end{cases}$

所以 $abc=15\times4\times18=1\,080$。

答:abc 的值是 1 080。

第 17 章 勾股定理

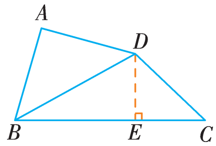
17.1 勾股定理

变式题型

1 D 【解析】∵ $S_1=3,S_3=9$,∴ $AB=\sqrt{3},CD=3$,过 A 作 $AE/\!/CD$ 交 BC 于 E,则 $\angle AEB=\angle DCB$。∵ $AD/\!/BC$,∴ 四边形 $AECD$ 是平行四边形,∴ $CE=AD$,$AE=CD=3$。∵ $\angle ABC+\angle DCB=90^\circ$,∴ $\angle AEB+\angle ABC=90^\circ$,∴ $\angle BAE=90^\circ$,∴ $BE=\sqrt{AB^2+AE^2}=2\sqrt{3}$。∵ $BC=2AD$,∴ $BC=2BE=4\sqrt{3}$,∴ $S_2=(4\sqrt{3})^2=48$,故选 D。

2 81 【解析】由图形可知四个小正方形 A,B,C,D 的面积的和等于最大的正方形的面积,故正方形 A,B,C,D 的面积的和为 81 cm^2。

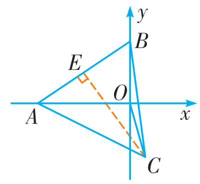
3 解:如图所示,过点 D 作$DE\perp BC$,垂足为点 E。因为 $AB=AD$,$\angle BAD=90^\circ$,所以 $AD=AB=2\sqrt{2}$,$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=4$。因为 $\angle CBD=30^\circ$,所以 $DE=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times4=2$,$BE=\sqrt{BD^2-DE^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$。



变式 3 图

因为 $\angle BCD=45^\circ$,所以 $CE=DE=2$。所以 $BC=BE+CE=2\sqrt{3}+2$。所以 $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}+\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3}+2)\times2=4+2\sqrt{3}+2=2\sqrt{3}+6$。

4 $\sqrt{3}-1$ 【解析】如图所示,过点 C 作 $CE\perp AB$,垂足为点 E,当点 C,O,E 在一条直线上时 OC 最短,∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形,∴ CE 过点 O,E 为 AB 中点,则 $EO=\frac{1}{2}AB=1$,故 OC 的最小值为 $OC_{\min}=CE-EO=BC\sin 60^\circ-1=\sqrt{3}-1$。故答案为:$\sqrt{3}-1$。



变式 4 图

5 (4.8,6.4) 【解析】过点 E 作 $EH\perp AB$,垂足为点 H,交 DC 于点 N,设 AE 交 DC 于点 M。

∵ $\triangle ABC\cong\triangle AEC$,$D(0,4)$,$B(8,0)$,

∴ $EC=BC=AD=4$,$\angle EAC=\angle BAC=\angle DCA$,

∴ $AM=CM$。又∵ $\angle ADM=\angle CEM=90^\circ$,$\angle AMD=\angle CME$,∴ $\triangle ADM\cong\triangle CEM$(AAS)。

设 $DM=x$,则 $AM=CM=8-x$。

在 Rt $\triangle ADM$ 中,$AD^2+DM^2=AM^2$,即 $4^2+x^2=(8-x)^2$,解得 $x=3$,∴ $ME=DM=3$,$MC=5$。

又 $S_{\triangle CME}=\frac{1}{2}EM\cdot CE=\frac{1}{2}MC\cdot EN$,

∴ $\frac{1}{2}\times3\times4=\frac{1}{2}\times5\times EN$,∴ $EN=2.4$,$EH=6.4$,

∴ $MN=\sqrt{EM^2-EN^2}=1.8$,

$AH=DN=DM+MN=4.8$。

∴ 点 E 的坐标是(4.8,6.4)。

故答案为:(4.8,6.4)。

6 证明:因为 $CD\perp AD$,所以$\angle ADC=90^\circ$,即$\triangle ADC$ 是直角三角形。

由勾股定理,得 $AD^2+CD^2=AC^2$。

又因为 $AD^2=2AB^2-CD^2$,所以 $AD^2+CD^2=2AB^2$,

所以 $AC^2=2AB^2$。

因为$\angle ABC=90^\circ$,所以$\triangle ABC$ 是直角三角形。

由勾股定理,得 $AB^2+BC^2=AC^2$,

把 $AC^2=2AB^2$ 代入得 $AB^2+BC^2=2AB^2$,

故 $BC^2=AB^2$,即 $AB=BC$。

7 解:(1)该城市受到台风的影响。理由如下:

过点 A 作 $AD\perp BC$,垂足为 D 点,

在 Rt$\triangle ADB$ 中,因为$\angle ABD=30^\circ$,$AB=240$ km,

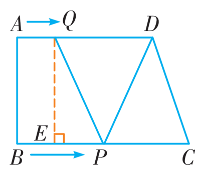
所以 $AD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times240=120(\text{km})$。
由题意知,距台风中心在 $(12-4)\times25=200(\text{km})$ 以内时,会受到台风影响。
因为 $120<200$,所以该城市受到台风影响。
(2)设台风中心移至点 E 处时,该城市开始受到台风的影响,台风中心移至点 F 处时,该城市脱离台风影响,则 $AE=AF=200\text{ km}$。
由勾股定理得 $DE^2=AE^2-AD^2=200^2-120^2=160^2$,所以 $DE=160\text{ km}$,同理可得 $DF=160\text{ km}$。
所以该城市受台风影响的时间为 $\frac{160\times2}{20}=16(\text{h})$。
(3)当台风中心位于 D 处时,对城市 A 的影响最大。因为 $AD=120\text{ km}$,故台风从 D 到 A,其风力将减弱 $120\div25=4.8$(级),所以 $12-4.8=7.2$(级),所以该城市受到台风影响最大风力为 7.2 级。

拔高题训练 正文 P44

1 C 【解析】$\because(a+b)^2=21$,$\therefore a^2+2ab+b^2=21$。$\because$ 大正方形的面积为 13,$\therefore a^2+b^2=13$,$\therefore 2ab=21-13=8$,$\therefore$ 小正方形的面积为 $13-8=5$。故选 C。

2 B 【解析】$\because PM\perp OB$,$OM=4$,$OP=5$,$\therefore PM=3$。当 $PN\perp OA$ 时,PN 的值最小。$\because OC$ 平分 $\angle AOB$,$PM\perp OB$,$\therefore PM=PN$。$\because PM=3$,$\therefore PN$ 的最小值为 3。故选 B。

3 $\frac{8}{3}$ 或 $\frac{7}{4}$ 【解析】由运动知,$AQ=t\text{ cm}$,$BP=2t\text{ cm}$,$\because AD=8\text{ cm}$,$BC=10\text{ cm}$,$\therefore DQ=AD-AQ=(8-t)(\text{cm})$,$PC=BC-BP=(10-2t)(\text{cm})$。



第 3 题图

$\because\triangle DPQ$ 是等腰三角形,且 $DQ\neq DP$,$\therefore$ ①当 $DP=QP$ 时,点 P 在 DQ 的垂直平分线上,$\therefore AQ+\frac{1}{2}DQ=BP$,$\therefore t+\frac{1}{2}(8-t)=2t$,$\therefore t=\frac{8}{3}$;②当 $DQ=PQ$ 时,如图,过点 Q 作 $QE\perp BC$,垂足为点 E,$\therefore\angle BEQ=\angle PEQ=90°$。$\because AD/\!/BC$,$\angle B=90°$,$\therefore\angle A=90°$,$\therefore$ 四边形 $ABEQ$ 是矩形,$\therefore EQ=AB=6\text{ cm}$,$BE=AQ=t\text{ cm}$,$\therefore PE=BP-BE=t\text{ cm}$,在 $\text{Rt}\triangle PEQ$ 中,$PQ=\sqrt{PE^2+EQ^2}=\sqrt{t^2+36}(\text{cm})$,$\because DQ=(8-t)\text{cm}$,$\therefore\sqrt{t^2+36}=8-t$,$\therefore t=\frac{7}{4}$。$\because$ 点 P 在边 BC 上,不和 C 重合,$\therefore 0\leqslant2t<10$,$\therefore 0\leqslant t<5$,$\therefore$ 此种情况符合题意,即 $t=\frac{8}{3}$ 或 $\frac{7}{4}$ 时,$\triangle DPQ$ 是等腰三角形。故答案为:$\frac{8}{3}$ 或 $\frac{7}{4}$。

4 6 【解析】$\because AF/\!/BC$,$\therefore\angle AFC=\angle FCD$。在 $\triangle AEF$ 与 $\triangle DEC$ 中,$\begin{cases}\angle AFC=\angle FCD,\\\angle AEF=\angle DEC,\\AE=DE,\end{cases}$ $\therefore\triangle AEF\cong\triangle DEC(\text{AAS})$,$\therefore AF=DC$。$\because BD=DC$,$\therefore AF=BD$,$\therefore$ 四边形 $AFBD$ 是平行四边形,$\therefore S_{\text{四边形}AFBD}=2S_{\triangle ABD}$。又 $\because BD=DC$,$\therefore S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle ABD}$,$\therefore S_{\text{四边形}AFBD}=S_{\triangle ABC}$。在 $\triangle ABC$ 中,$\because\angle BAC=90°$,$AB=4$,$AC=6$,$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}\times4\times6=12$,$\therefore S_{\text{四边形}AFBD}=12$,$\therefore\triangle AFC$ 的面积 $=\frac{1}{2}S_{\text{四边形}AFBD}=6$。故答案为:6。

5 解:(1)$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,$AC=8\text{ cm}$,$BC=6\text{ cm}$,$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=10\text{ cm}$。
(2)$\triangle ABC$ 的面积 $=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\times6\times8=24(\text{cm}^2)$。
(3)由(2)可知 $\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}CD\cdot AB=24$,$\therefore CD=\frac{24}{AB}=2.4(\text{cm})$。

6 解:(1)根据三角形的三边关系,得 $7-3<x<7+3$,即 $4<x<10$。
(2)$\because$ 在(1)的条件下,取 x 的偶数值为直角 $\triangle ABC$ 的两直角边长($AC>BC$),$\therefore AC=8\text{ cm}$,$BC=6\text{ cm}$。由勾股定理可知斜边 $AB=\sqrt{8^2+6^2}=10(\text{cm})$。当 $PC\perp AB$ 时,PC 取最小值,PC 的最小值 $=\frac{1}{2}\times8\times6\div\frac{1}{2}\div10=4.8(\text{cm})$,故 PC 的最小值是 4.8 cm。

17.2 勾股定理的逆定理

变式题型

1 解:(1)原命题是真命题,逆命题为:轴对称图形是长方形,是假命题。
(2)原命题是真命题,逆命题为:由无数个点组成的图形是一条直线,是假命题。
(3)原命题是真命题,逆命题为:有两个角相等的三角形是等腰三角形,是真命题。
(4)原命题是真命题,逆命题为:如果两个数的积为 1,那么这两个数互为倒数,是真命题。
(5)原命题是假命题,逆命题为:如果 $a>0$,$b>0$,那么 $a+b>0$,是真命题。

2 解:连接 BD,在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中,由勾股定理得 $BD^2=AB^2+AD^2=(5\sqrt{3})^2+5^2=100$。在 $\triangle BCD$ 中,$BC^2+CD^2=8^2+6^2=100=BD^2$。由勾股定理的逆定理可知 $\angle BCD=90°$,故 $S_{\text{四边形}ABCD}=S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times8\times6+\frac{1}{2}\times5\sqrt{3}\times5=24+\frac{25\sqrt{3}}{2}$。

3 解：(1)根据题意，得 $PQ=16\times1.5=24$(n mile)，$PR=12\times1.5=18$(n mile)。

(2)因为 $PQ^2+PR^2=24^2+18^2=30^2$，所以 $RQ^2=PR^2+PQ^2$，所以 $\triangle PQR$ 为直角三角形，且 $\angle RPQ=90°$。因为“远航”号沿东北方向航行，所以“海天”号沿西北方向(或北偏西 45°方向)航行。

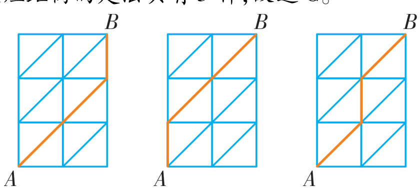
4 解：因为 $AB\perp AD$，所以 $\angle A=90°$，在 Rt$\triangle ABD$ 中，$BD^2=AB^2+AD^2=2^2+(2\sqrt{3})^2=16$，所以 $BD=4$，所以 $AB=\frac{1}{2}BD$，可知 $\angle ADB=30°$。在 $\triangle BDC$ 中，$BD^2+CD^2=16+3^2=25$，$BC^2=5^2=25$，所以 $BD^2+CD^2=BC^2$，所以 $\triangle BCD$ 为直角三角形，且 $\angle BDC=90°$，所以 $\angle ADC=\angle ADB+\angle BDC=30°+90°=120°$。

拔高题训练

正文 P52

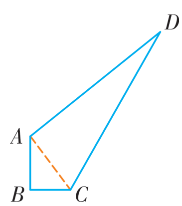
1 D 【解析】$\triangle ABC$ 是等边三角形，则 $\angle BAC=60°$。又 $\triangle AP'C\cong\triangle APB$，则 $AP=AP'$，$\angle BAP=\angle CAP'$，$\therefore\angle PAP'=\angle BAC=60°$，$\therefore\triangle APP'$ 是等边三角形。又 $PA:PB:PC=3:4:5$，$\therefore$ 设 $PA=3x$，则 $PP'=PA=3x$，$P'C=PB=4x$，$PC=5x$，根据勾股定理的逆定理可知 $\triangle PCP'$ 是直角三角形，且 $\angle PP'C=90°$。又 $\triangle APP'$ 是等边三角形，$\therefore\angle AP'P=60°$，$\therefore\angle AP'C=\angle APB=150°$，$\therefore$ 错误的结论只能是 $\angle APC=135°$。故选 D。

2 C 【解析】根据题意得出最短路程如图所示，最短路程长为 $\sqrt{2^2+2^2}+1=2\sqrt{2}+1$，则从 A 点到 B 点的最短距离的走法共有 3 种，故选 C。



第 2 题图

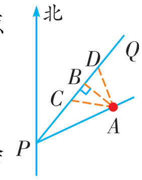
3 $\frac{9}{4}$ 【解析】连接 AC，$\because AB\perp BC$，$\therefore\triangle ABC$ 是直角三角形，$\therefore AC^2=AB^2+BC^2=1^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2$，$\therefore AC=\frac{5}{4}$，且 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC=\frac{1}{2}\times1\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$。$\because$ 在 $\triangle ACD$ 中，$AC^2+AD^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2+3^2=\left(\frac{13}{4}\right)^2=CD^2$，$\therefore\triangle ACD$ 是直角三角形，$\therefore S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot AD=\frac{1}{2}\times\frac{5}{4}\times3=\frac{15}{8}$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\frac{3}{8}+\frac{15}{8}=\frac{9}{4}$。



第 3 题图

4 13 直角 【解析】根据三角形的三边关系知，第三边 c 应满足：$12-5=7<c<5+12=17$，又 $\because c$ 为奇数，$\therefore$ 满足条件的奇数有 9，11，13，15，与 $a+b$ 的和能被 3 整除的只有 13，此时有 $5^2+12^2=13^2$，$\therefore$ 根据勾股定理的逆定理，知 $\triangle ABC$ 是直角三角形，故填：13；直角。

5 解：(1)A 市会受到台风影响。过 A 点作 $AB\perp PQ$，垂足为点 B，$\because\angle APQ=75°-45°=30°$，$\therefore AB=\frac{1}{2}AP=\frac{1}{2}\times320=160(km)<200$(km)，$\therefore A$ 市会受到台风影响。



第 5 题图

(2)在 PQ 上取 C，D 两点，使 $AC=AD=200$(km)，连接 AC，AD，则 $CB=DB$，由勾股定理可求得 $CB=120$ km，

$\therefore CD=2CB=240$ km，$t=240\div30=8$(h)，$\therefore A$ 市受台风影响时间是 8 h。

6 解：(1)n^2-1　$2n$　n^2+1

(2)猜想为：以 a，b，c 为边的三角形是直角三角形。证明：$\because a=n^2-1$，$b=2n$，$c=n^2+1$，$\therefore a^2+b^2=(n^2-1)^2+(2n)^2=n^4-2n^2+1+4n^2=n^4+2n^2+1=(n^2+1)^2$。而 $c^2=(n^2+1)^2$，$\therefore$ 根据勾股定理的逆定理可知，以 a，b，c 为边的三角形是直角三角形。

第 18 章 平行四边形

18.1 平行四边形

变式题型

1 D 【解析】

选项	依据	结论
A	平行四边形的对边相等	正确
B	平行线之间的距离处处相等	正确
C	两点间的距离的定义	正确
D	两平行线之间的距离的定义	错误

2 证明：在 $\square ABCD$ 中，有 $AD \mathrel{\underline{\parallel}} BC$，$AB=CD$，$\angle B=\angle D$，$\angle BAD=\angle BCD$。因为 $AE\perp BC$，$CF\perp AD$，可证四边形 $AECF$ 为平行四边形，故 $AF=CE$，所以 $BE=DF$。又因为 $BG=DH$，$\angle B=\angle D$，所以 $\triangle BEG\cong\triangle DFH$，所以 $GE=HF$。因为 $AB=CD$，$BG=DH$，所以 $AG=CH$。又因为 $AF=CE$，$\angle GAF=\angle HCE$，所以 $\triangle AGF\cong\triangle CHE$，所以 $GF=HE$。所以四边形 $GEHF$ 是平行四边形。

3 证明：因为 $DC=AC$，且 $CE\perp AD$，垂足为点 E，所以 $AE=ED$。又因为点 F 是 AB 的中点，所以 EF 是 $\triangle ABD$ 的中位线，所以 $EF\parallel BC$。

【解析】欲证 $EF\parallel BC$，只要证 EF 为 $\triangle ABD$ 的中位线，结合条件证点 E 是 AD 的中点即可。

4 证明：因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AB \mathrel{\underline{\parallel}}$

CD，所以 $\angle ABE=\angle CDF$。因为 $AE\perp BD$，$CF\perp BD$，所以 $\angle AEB=\angle CFD=90°$。在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中，$\begin{cases}\angle ABE=\angle CDF,\\ \angle AEB=\angle CFD,\\ AB=CD,\end{cases}$ 所以 $\triangle ABE\cong\triangle CDF$，所以 $BE=DF$。

5 证明：因为 D,E 分别是 AC,AB 的中点，所以 $DE/\!/BC$，所以 $\angle ADE=\angle ACB=90°$，所以直线 DE 是线段 AC 的垂直平分线，所以 $AE=CE$，所以 $\angle A=\angle DCE$。因为 $\angle CDF=\angle A$，所以 $\angle DCE=\angle CDF$，所以 $DF/\!/CE$，所以四边形 $DECF$ 是平行四边形。

6 解：(答案不唯一)条件1：$AE=CF$ 证明：由▱$ABCD$ 知 $AD/\!/BC$，$AD=BC$。因为 $AE=CF$，所以 $DE=BF$，所以四边形 $EBFD$ 为平行四边形，故 $BE=DF$。条件2：$BE/\!/DF$ 证明：由▱$ABCD$ 知 $AD/\!/BC$。又因为 $BE/\!/DF$，所以四边形 $EBFD$ 为平行四边形，所以 $BE=DF$。条件3：$\angle ABE=\angle CDF$ 证明：由▱$ABCD$ 知 $AB=CD$，$\angle A=\angle C$。又因为 $\angle ABE=\angle CDF$，所以 $\triangle ABE\cong\triangle CDF$，所以 $BE=DF$。

拔高题训练

正文 P73

1 B 【解析】连接 BF，设▱$AFEO$ 的面积为 $4m$。$\because FO:OC=3:1$，$BE=OB$，$AF/\!/OE$，$\therefore S_{\triangle BOF}=S_{\triangle AOB}=m$，$S_{\triangle BOC}=\dfrac{1}{3}m$，$S_{\triangle AOC}=\dfrac{2m}{3}$，$\therefore S_{\triangle AOB}:S_{\triangle AOC}:S_{\triangle BOC}=m:\dfrac{2m}{3}:\dfrac{1}{3}m=3:2:1$，故选 B。

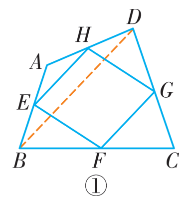
2 D 【解析】$\because BC=EC$，$\therefore \angle CEB=\angle CBE$。$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore DC/\!/AB$，$\therefore \angle CEB=\angle EBF$，$\therefore \angle CBE=\angle EBF$，$\therefore BE$ 平分 $\angle CBF$，故①正确；$\because BC=EC$，$CF\perp BE$，$\therefore \angle ECF=\angle BCF$，$\therefore CF$ 平分 $\angle DCB$，故②正确；$\because DC/\!/AB$，$\therefore \angle DCF=\angle CFB$。$\because \angle ECF=\angle BCF$，$\therefore \angle CFB=\angle BCF$，$\therefore FB=BC$，$\therefore$ ③正确；$\because FB=BC$，$CF\perp BE$，$\therefore B$ 点一定在 FC 的垂直平分线上，即 PB 垂直平分 FC，$\therefore PF=PC$，故④正确。故选 D。

3 1 【解析】$\because A_2B_2,B_2C_2,C_2A_2$ 分别等于 A_1B_1，B_1C_1，C_1A_1 的一半，$\therefore \triangle A_2B_2C_2$ 的周长为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的周长的 $\dfrac{1}{2}$，以此类推，$\triangle A_5B_5C_5$ 的周长为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的周长的 $\dfrac{1}{2^4}$，$\therefore \triangle A_5B_5C_5$ 的周长为 $(7+4+5)\times\dfrac{1}{2^4}=1$。故答案为：1。

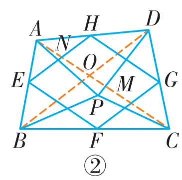
4 $BD=CD$(答案不唯一) 【解析】$\because EF$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线，$\therefore CF=AF$，$AE=\dfrac{1}{2}AB$。$\because BD=CD$，$\therefore$ 点 D 是 BC 的中点，DF 是 $\triangle ABC$ 的中位线，$\therefore DF \mathrel{\underline{\parallel}} AE$。故要使四边形 $AEDF$ 为平行四边形，根据一组对边平行且相等的四边形是平行四边形，需要添加条件 $BD=CD$，故答案为 $BD=CD$(答案不唯一)。

5 证明：$\because AB/\!/DE$，$AC/\!/DF$，$\therefore \angle B=\angle DEF$，$\angle ACB=\angle F$。$\because BE=CF$，$\therefore BE+CE=CF+CE$，$\therefore BC=EF$。在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，$\begin{cases}\angle B=\angle DEF,\\ BC=EF,\\ \angle ACB=\angle F,\end{cases}$ $\therefore \triangle ABC\cong\triangle DEF(\text{ASA})$，$\therefore AB=DE$。又 $\because AB/\!/DE$，$\therefore$ 四边形 $ABED$ 是平行四边形。

6 (1)证明：如图①，连接 BD。$\because$ 点 E,H 分别为边 AB,DA 的中点，$\therefore EH/\!/BD$，$EH=\dfrac{1}{2}BD$。$\because$ 点 F,G 分别为边 BC,CD 的中点，$\therefore FG/\!/BD$，$FG=\dfrac{1}{2}BD$，$\therefore EH/\!/FG$，$EH=FG$，$\therefore$ 中点四边形 $EFGH$ 是平行四边形。



(2)解：四边形 $EFGH$ 是菱形。证明：如图②，连接 AC,BD。$\because \angle APB=\angle CPD$，$\therefore \angle APB+\angle APD=\angle CPD+\angle APD$，即 $\angle APC=\angle BPD$。在 $\triangle APC$ 和 $\triangle BPD$ 中，$\begin{cases}PA=PB,\\ \angle APC=\angle BPD,\\ PC=PD,\end{cases}$ $\therefore \triangle APC\cong\triangle BPD$，$\therefore AC=BD$。$\because$ 点 E,F,G 分别为边 AB,BC,CD 的中点，$\therefore EF=\dfrac{1}{2}AC$，$FG=\dfrac{1}{2}BD$，$\therefore EF=FG$。$\because$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形，$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是菱形。



第 6 题图

(3)解：四边形 $EFGH$ 是正方形。证明：如图②，设 AC 与 BD 交于点 O，AC 与 PD 交于点 M，AC 与 EH 交于点 N。$\because \triangle APC\cong\triangle BPD$，$\therefore \angle ACP=\angle BDP$。$\because \angle DMO=\angle CMP$，$\therefore \angle COD=\angle CPD=90°$。$\because EH/\!/BD$，$AC/\!/HG$，$\therefore \angle EHG=90°$。$\because$ 四边形 $EFGH$ 是菱形，$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是正方形。

18.2 特殊的平行四边形

18.2.1 矩形

变式题型

1 解：因为 DE 垂直平分 OC，所以 $CD=OD$。因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $AB=CD$，$\angle ADC=90°$，$AC=2OA=2OC$，$BD=2OD=2OB$，$AC=BD$，所以 $OA=OC=OB=OD$，所以 $CD=OD=OC$，所以 $\triangle OCD$ 是等边三角形，所以 $\angle DCA=60°$，所以 $AC=2CD$。在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中，$AD=4$，由勾股定理，得 $CD^2+4^2=(2CD)^2$，所以 $CD=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，所以 $AC=$

$2CD=\frac{8\sqrt{3}}{3}$，$AB=CD=\frac{4\sqrt{3}}{3}$。因为 $DE\perp AC$，所以 $\angle DEC=90°$，所以 $\angle CDE=90°-60°=30°$，所以 $CE=\frac{1}{2}CD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$。在 Rt△$DEC$ 中，由勾股定理，得 $DE=\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=2$，即 $AB=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$AC=\frac{8\sqrt{3}}{3}$，$DE=2$。

2 解：∵ E，F 分别是 CD，CA 的中点，∴ $EF\parallel AD$ 且 $EF=\frac{1}{2}AD$，∴ $\angle CFE=\angle CAD=45°$，$EF=4$。∵ $\angle ABC=90°$，F 是 CA 的中点，∴ $BF=\frac{1}{2}AC=AF=4$，∴ $\angle BAF=\angle ABF$，∴ $\angle BFC=2\angle BAC=45°$，∴ $\angle BFE=90°$，∴ $BE=4\sqrt{2}$。

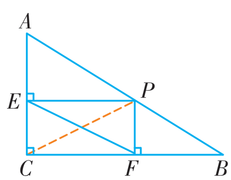
3 (1)证明：因为 $AF\parallel BC$，所以 $\angle AFE=\angle DCE$。因为 E 是 AD 的中点，所以 $AE=DE$。在△AEF 和△DEC 中，$\begin{cases}\angle AFE=\angle DCE,\\ \angle AEF=\angle DEC,\\ AE=DE,\end{cases}$ 所以△AEF≌△DEC，所以 $AF=DC$。又因为 $AF=BD$，所以 $BD=CD$。

(2)解：四边形 $AFBD$ 是矩形。理由如下：因为 $AF=BD$，$AF\parallel BD$，所以四边形 $AFBD$ 是平行四边形，由(1)知，$BD=CD$，所以 D 是 BC 的中点。因为 $AB=AC$，所以 $AD\perp BC$，所以 $\angle ADB=90°$，所以四边形 $AFBD$ 是矩形。

拔高题训练

正文 P84

1 B 【解析】连接 CP，∵ $PE\perp AC$，$PF\perp BC$，$\angle ACB=90°$，∴ $\angle PEC=\angle ACB=\angle PFC=90°$，∴ 四边形 $PECF$ 是矩形，∴ $EF=CP$。当 $CP\perp AB$ 时，CP 最小，即 EF 最小。



第 1 题图

在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$BC=4$，由勾股定理得 $AB=5$，由三角形面积公式得 $AC\cdot BC=AB\cdot CP$，故 $CP=\frac{12}{5}$，即 EF 的最小值是 $\frac{12}{5}=2.4$，故选 B。

2 B 【解析】选项 A 中，$\angle A=\angle B$，又 $\angle A+\angle B=180°$，所以 $\angle A=\angle B=90°$，可以判定这个平行四边形为矩形；选项 B 中，$\angle A=\angle C$ 不能判定这个平行四边形为矩形；选项 C 中，$AC=BD$，即对角线相等，可推出这个平行四边形是矩形；选项 D 中，$AB\perp BC$，所以 $\angle B=90°$，可以判定这个平行四边形为矩形。

3 25 【解析】∵ 在△ABC 中，AD 是 BC 边上的高，M，N 分别是 AB，AC 边的中点，∴ $AB=2DM=10$，$AC=2DN=6$。又 $BC=9$，∴ △ABC 的周长是 $AB+AC+BC=10+6+9=25$。故答案是：25。

4 3

5 (1)证明：∵ 四边形 $ABED$ 是平行四边形，∴ $BE\parallel AD$，$BE=AD$。∵ $AD=DC$，∴ $BE\parallel DC$，$BE=DC$，∴ 四边形 $BECD$ 是平行四边形。∵ 在△ABC 中，$AB=BC$，$AD=DC$，∴ $BD\perp AC$，∴ $\angle BDC=90°$，∴ 四边形 $BECD$ 是矩形。

(2)解：∵ 四边形 $BECD$ 是矩形，∴ $\angle ACE=\angle BDC=90°$。∵ $\angle BAC=60°$，$AB=BC$，∴ △ABC 是等边三角形，∴ $\angle BCD=\angle ABC=60°$，$AC=BC=AB=4$。∵ $AD=CD$，∴ $\angle CBD=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\times60°=30°$，∴ $CD=\frac{1}{2}BC=2$。由勾股定理得 $BD=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，∴ $CE=BD=2\sqrt{3}$。在 Rt△ACE 中，由勾股定理得 $AE=\sqrt{AC^2+CE^2}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$。

6 (1)证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $\angle BAD=90°$。∵ $\angle BAD$ 的平分线 AE 与 BC 边交于点 E，∴ $\angle BAE=\angle EAD=45°$。∵ $PF\perp AP$，∴ $\angle PAF=\angle PFA=45°$，∴ $AP=PF$。∵ $\angle MPN=90°$，$\angle APF=90°$，∴ $\angle MPN-\angle APN=\angle APF-\angle APN$，∴ $\angle MPA=\angle FPN$，且 $AP=PF$，$\angle MAP=\angle PFN=45°$，∴ △$PAM$≌△$PFN$（ASA）。

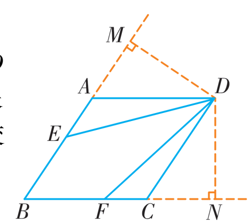
(2)解：∵ $PA=3$，∴ $PA=PF=3$，且 $\angle APF=90°$，∴ $AF=\sqrt{PA^2+PF^2}=3\sqrt{2}$。∵ △$PAM$≌△$PFN$，∴ $AM=NF$，∴ $AM+AN=NF+AN=AF=3\sqrt{2}$。

18.2.2 菱形

变式题型

1 【探究】证明：在 Rt△AED 和 Rt△CFD 中，∵ $\begin{cases}AD=CD,\\ DE=DF,\end{cases}$ ∴ Rt△AED≌Rt△CFD（HL），∴ $\angle ADE=\angle CDF$。

【拓展】解：如图，过点 D 作 $DM\perp BA$ 交 BA 的延长线于点 M，作 $DN\perp BC$ 交 BC 的延长线于点 N，∴ $\angle AMD=\angle CND=90°$。∵ 四边形$ABCD$是菱形，



变式 1 图

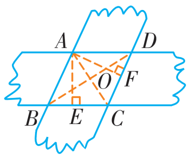
∴ $AD=CD$，$\angle BAD=\angle BCD$，∴ $\angle MAD=\angle NCD$，∴ △AMD≌△CND，∴ $MD=DN$，$\angle MDA=\angle NDC$。由探究得 $\angle MDE=\angle NDF$，∴ $\angle MDE-\angle MDA=\angle NDF-\angle NDC$，即 $\angle ADE=\angle CDF$。∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle BAC=120°$，∴ $\angle ADC=60°$。∵ $\angle EDF=30°$，∴ $\angle CDF+\angle ADE=60°-30°=$

$30°$。$\because \angle ADE=\angle CDF$,

$\therefore \angle CDF=15°$。

2 解:连接 EF,FG,GH,EH。因为 E,F,G,H 分别是 AB,BC,CD,DA 的中点,所以 EH,EF,FG,GH 分别是$\triangle ABD,\triangle ABC,\triangle BCD,\triangle ACD$ 的中位线。因为 $AC=BD=6$,所以 $EF=GH=\frac{1}{2}AC=3,EH=FG=\frac{1}{2}BD=3$,所以 $EH=EF=GH=FG=3$,所以四边形 $EFGH$ 为菱形,所以 $EG\perp HF$,设垂足为 O,所以 $EG=2OE,FH=2OH$。在 Rt$\triangle OEH$ 中,根据勾股定理,得 $OE^2+OH^2=EH^2=9$,等式两边同时乘 4,得 $4OE^2+4OH^2=9\times4=36$,所以$(2OE)^2+(2OH)^2=36$,即 $EG^2+FH^2=36$。

3 $2\sqrt{21}$ 【解析】过点 A 作 $AE\perp BC$,垂足为点 E,$AF\perp CD$,垂足为点 F,连接 AC,BD 交于点 O。$\because$ 两条纸条宽度相同,$\therefore AE=AF$。$\because AB/\!/CD,AD/\!/BC,\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形。$\because S_{\square ABCD}=BC\cdot AE=CD\cdot AF$,又$\because AE=AF,\therefore BC=CD,\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,$\therefore OB=OD,OA=OC,AC\perp BD,\therefore OB=\sqrt{AB^2-OA^2}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21},\therefore BD=2\sqrt{21}$。



变式 3 图

故答案为:$2\sqrt{21}$。

4 解:(1)因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $AB=BC$。又因为 $AB=AC$,所以$\triangle ABC$ 是等边三角形。因为 E 是 BC 的中点,所以 $AE\perp BC$(等腰三角形"三线合一"),所以$\angle AEC=90°$。因为 E,F 分别是 BC,AD 的中点,所以 $AF=\frac{1}{2}AD,EC=\frac{1}{2}BC$。因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $AD/\!/BC$ 且 $AD=BC$,所以 $AF/\!/EC$ 且 $AF=EC$,所以四边形 $AECF$ 是平行四边形。又因为$\angle AEC=90°$,所以四边形 $AECF$ 是矩形。

(2)因为 $AB=8$,所以 $BE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AB=4$。在 Rt$\triangle ABE$ 中,$AE=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$,所以 $S_{菱形ABCD}=8\times4\sqrt{3}=32\sqrt{3}$。

5 (1)证明:在$\triangle DFC$ 中,$\angle DFC=90°,\angle C=30°$,$DC=2t$,所以 $DF=t$。又因为 $AE=t$,所以 $AE=DF$。

(2)解:能。理由如下:因为 $AB\perp BC,DF\perp BC$,所以 $AE/\!/DF$。又因为 $AE=DF$,所以四边形 $AEFD$ 为平行四边形。在 Rt$\triangle ABC$ 中,设 $AB=x$,则由$\angle C=30°$,得 $AC=2x$,由勾股定理,得 $AB^2+BC^2=AC^2$,即 $x^2+(5\sqrt{3})^2=4x^2$,解得 $x=5$(负根已舍去),所以 $AB=5$。所以 $AC=2AB=10$。所以 $AD=AC-DC=10-2t$。若使平行四边形 $AEFD$ 为菱形,则需 $AE=AD$,即 $t=10-2t$,所以 $t=\frac{10}{3}$。即当$t=\frac{10}{3}$时,四边形 $AEFD$ 为菱形。

(3)解:①当$\angle EDF=90°$时,四边形 $EBFD$ 为矩形。在 Rt$\triangle AED$ 中,$\angle ADE=\angle C=30°$,所以 $AD=2AE$,即 $10-2t=2t$,解得 $t=\frac{5}{2}$。②当$\angle DEF=90°$时,由(2)知 $EF/\!/AD$,所以$\angle ADE=\angle DEF=90°$。因为$\angle A=90°-\angle C=60°$,所以$\angle AED=30°$,所以 $AE=2AD$,即 $2(10-2t)=t$,解得 $t=4$。③当$\angle EFD=90°$时,此种情况不存在。

综上所述,当$t=\frac{5}{2}$或 4 时,$\triangle DEF$ 为直角三角形。

拔高题训练

正文 P94

1 A 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,$\therefore AB=BC=CD=DA,AB/\!/CD,OA=OC,OB=OD,AC\perp BD$,$\therefore \angle BAG=\angle EDG,\triangle ABO\cong\triangle CBO\cong\triangle CDO\cong\triangle ADO$。$\because CD=DE,\therefore AB=DE$。在$\triangle ABG$ 和$\triangle DEG$ 中,$\begin{cases}\angle BAG=\angle EDG,\\ \angle AGB=\angle DGE,\\ AB=DE,\end{cases}\therefore \triangle ABG\cong\triangle DEG$(AAS),$\therefore AG=DG,\therefore OG$ 是$\triangle ACD$ 的中位线,$\therefore OG=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}AB,\therefore$ ①正确;$\because AB/\!/DE,AB=DE,\therefore$ 四边形 $ABDE$ 是平行四边形。$\because \angle BCD=\angle BAD=60°,\therefore \triangle ABD,\triangle BCD$ 是等边三角形,$\therefore AB=BD=AD,\angle ODC=60°,OD=AG=DG=\frac{1}{2}AD,\therefore$ 四边形 $ABDE$ 是菱形,④正确;$\because AD\perp BE$,由菱形的性质得$\triangle ABG\cong\triangle DBG\cong\triangle DEG$,又在$\triangle DCO$ 和$\triangle ABG$ 中,$\begin{cases}OD=AG,\\ \angle ODC=\angle BAG=60°,\\ DC=AB,\end{cases}$

$\therefore \triangle DCO\cong\triangle ABG$(SAS),$\therefore \triangle ABO\cong\triangle CBO\cong\triangle CDO\cong\triangle ADO\cong\triangle BAG\cong\triangle BDG\cong\triangle EDG,\therefore$ ②不正确;$\because OB=OD,AG=DG,\therefore OG$ 是$\triangle ABD$ 的中位线,$\therefore OG/\!/AB,OG=\frac{1}{2}AB,\therefore \triangle GOD\backsim\triangle ABD$,$\triangle ABF\backsim\triangle OGF,\therefore \triangle GOD$的面积$=\frac{1}{4}\triangle ABD$ 的面积,$\triangle ABF$ 的面积$=\triangle OGF$ 的面积的 4 倍,$\therefore AF:OF=2:1,\therefore \triangle AFG$的面积$=\triangle OGF$ 的面积的 2 倍。又$\because \triangle GOD$ 的面积$=\triangle AOG$ 的面积$=\triangle BOG$ 的面积,$\therefore S_{四边形ODGF}=S_{\triangle ABF},\therefore$ ③不正确。综上,正确的是①④,故选 A。

2 B 【解析】$\because$ 分别以 A 和 B 为圆心,大于$\frac{1}{2}AB$ 的长为半径画弧,两弧相交于点 $C,D,\therefore AC=AD=BD=BC,\therefore$ 四边形 $ADBC$ 一定是菱形,故选 B。

3 $20°$ 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore DO=OB$。$\because DE\perp BC$，垂足为 E，$\therefore OE$ 为 $Rt\triangle BED$ 斜边上的中线，$\therefore OE=\frac{1}{2}BD$，$\therefore OB=OE$，$\therefore \angle OBE=\angle OEB$。$\because \angle ABC=140°$，$\therefore \angle OBE=70°$，$\therefore \angle OED=90°-70°=20°$，故答案为：$20°$。

4 (1)(2)(6)　(3)(4)(5)(答案不唯一)

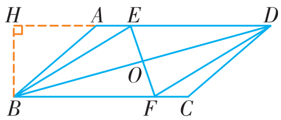
5 (1)证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore BC/\!/AD$，

$\therefore \angle ADB=\angle CBD$。

又$\because$ 点 O 为 BD 中点，

$\therefore BO=OD$。



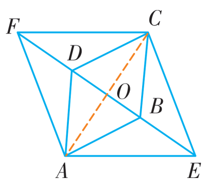
第 5 题图

$\because$ 在 $\triangle DOE$ 和 $\triangle BOF$ 中，$\begin{cases}\angle EDO=\angle FBO,\\ OD=OB,\\ \angle EOD=\angle FOB,\end{cases}$ $\therefore \triangle DOE\cong\triangle BOF(ASA)$，

$\therefore ED=BF$，$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形。

(2)解：如图，过点 B 作 $BH\perp AD$，交 DA 延长线于点 H，$\because \angle BAD=135°$，$\therefore \angle BAH=45°$。在 $Rt\triangle ABH$中，$\because AB=3\sqrt{2}$，$\therefore BH=HA=3$。设 $AE=x$，$\because$ 四边形 $BEDF$ 为菱形，$\therefore EB=ED=6-x$。在 $Rt\triangle BHE$ 中，$BH^2+HE^2=BE^2$，$\therefore 3^2+(3+x)^2=(6-x)^2$，解得 $x=1$，$\therefore AE=1$。

6 (1)证明：连接 AC 交 BD 于 O，如图所示。$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore AB=BC=CD=DA$，$OA=OC$，$OB=OD$，$AC\perp BD$。$\because BE=DF$，$\therefore OE=OF$，$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形。又$\because AC\perp BD$，$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是菱形。



第 6 题图

(2)解：$\because \angle BAD=60°$，

$\therefore \triangle ABD$是等边三角形，

$\therefore BD=AB=2$，$\therefore OB=\frac{1}{2}BD=1$，$\therefore OA=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，$\therefore AC=2\sqrt{3}$。当$\angle AEC=90°$时，$\triangle ACE$ 是等腰直角三角形。$\because AC\perp BD$，$\therefore OE=\frac{1}{2}AC=\sqrt{3}$，$\therefore BE=\sqrt{3}-1$，$\therefore$ 若$\angle AEC$ 是锐角，BE 的长的取值范围为 $BE>\sqrt{3}-1$。

18.2.3 正方形

变式题型

1 B 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore$ 直线 AC 是正方形 $ABCD$ 的对称轴。$\because EG\perp AB$，$EI\perp AD$，$FH\perp AB$，$FJ\perp AD$，垂足分别为 G，I，H，J，$\therefore$ 根据对称性可知四边形 $EFHG$ 的面积与四边形 $EFJI$ 的面积相等，$\therefore S_{阴}=\frac{1}{2}S_{正方形ABCD}=\frac{1}{2}$，故选 B。

2 解：因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $\angle B=90°$，$\angle ACB=45°$，$AB=BC=1\text{ cm}$。因为 $EF\perp AC$，所以 $\angle EFA=\angle EFC=90°$。又因为 $\angle ECF=45°$，所以 $\angle FEC=90°-\angle ECF=45°$，所以 $\angle ECF=\angle FEC$，所以 $EF=FC$。因为 AE 平分 $\angle BAC$，所以 $\angle BAE=\angle FAE$。又因为 $\angle B=\angle EFA=90°$，$AE=AE$，所以 $\triangle ABE\cong\triangle AFE$。所以 $AF=AB=1\text{ cm}$，$BE=EF$，所以 $FC=BE$。在 $Rt\triangle ABC$ 中，$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}(\text{cm})$，所以 $FC=AC-AF=(\sqrt{2}-1)\text{cm}$，所以 $BE=(\sqrt{2}-1)\text{cm}$。

3 (1)证明：$\because OD$ 平分 $\angle AOC$，OF 平分 $\angle COB$(已知)，$\therefore \angle AOC=2\angle COD$，$\angle COB=2\angle COF$。$\because \angle AOC+\angle COB=180°$，$\therefore 2\angle COD+2\angle COF=180°$，$\therefore \angle COD+\angle COF=90°$，$\therefore \angle DOF=90°$。$\because OA=OC$，$OD$ 平分 $\angle AOC$(已知)，$\therefore OD\perp AC$，$AD=DC$(等腰三角形“三线合一”的性质)，$\therefore \angle CDO=90°$。$\because CF\perp OF$，$\therefore \angle CFO=90°$，$\therefore$ 四边形 $CDOF$ 是矩形。

(2)解：当$\angle AOC=90°$时，四边形 $CDOF$ 是正方形。理由如下：$\because \angle AOC=90°$，$AD=DC$，$\therefore OD=DC$。又由(1)知四边形 $CDOF$ 是矩形，则四边形 $CDOF$ 是正方形。因此，当$\angle AOC=90°$时，四边形 $CDOF$ 是正方形。

4 (1)解：$EA+EB=\sqrt{2}OE$。证明：延长 EA 至点 F，使 $AF=BE$，连接 OF。因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $OA=OB$，$\angle AOB=90°$，所以 $\angle AEB+\angle AOB=90°+90°=180°$，所以 $\angle OBE+\angle OAE=180°$。因为 $\angle OAE+\angle OAF=180°$，所以 $\angle OBE=\angle OAF$。在 $\triangle OBE$ 和 $\triangle OAF$ 中，因为 $\begin{cases}OB=OA,\\ \angle OBE=\angle OAF,\\ BE=AF,\end{cases}$ 所以 $\triangle OBE\cong\triangle OAF(SAS)$，所以 $OE=OF$，$\angle BOE=\angle AOF$。因为 $\angle BOE+\angle AOE=90°$，所以 $\angle AOF+\angle AOE=90°$，所以 $\angle EOF=90°$，所以 $\triangle EOF$ 是等腰直角三角形，所以 $2OE^2=EF^2$，即 $2OE^2=(EA+EB)^2$，所以 $EA+EB=\sqrt{2}OE$。

(2)证明：因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $\angle BAD=90°$，$AB=AD$，所以 $\angle EAB+\angle DAH=90°$。因为 $\angle EAB+\angle ABE=90°$，所以 $\angle ABE=\angle DAH$。在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle DAH$ 中，因为 $\begin{cases}\angle BEA=\angle H=90°,\\ \angle ABE=\angle DAH,\\ AB=AD,\end{cases}$ 所以 $\triangle ABE\cong\triangle DAH$。同理可得，$\triangle ABE\cong\triangle CDG\cong\triangle BCF$，所以 $AE=BF=CG=DH$，$BE=AH=DG=CF$。所以 $CG+CF=BF+BE=AE+AH=DH+GD$，即 $GF=FE=EH=HG$。所以四边形 $EFGH$ 为菱形。又因为 $\angle H=90°$，所以四边形 $EFGH$ 为正方形。

5 $\frac{1}{2}$

6 (1)证明:因为四边形 $ABFG$,$BCED$ 都是正方形,所以 $AB=FB$,$BC=BD$,$\angle ABF=\angle CBD=90°$,所以 $\angle ABF+\angle ABC=\angle CBD+\angle ABC$,即 $\angle CBF=\angle ABD$,所以 $\triangle ABD\cong\triangle FBC(\text{SAS})$。

(2)解:由(1)知 $\triangle ABD\cong\triangle FBC(\text{SAS})$,所以 $CF=AD=6$,$\angle DAB=\angle CFB$。设 CF 交 AB 于点 N。因为 $\angle ABF=90°$,所以 $\angle CFB+\angle BNF=90°$。又因为 $\angle DAB=\angle CFB$,$\angle BNF=\angle ANM$,所以 $\angle DAB+\angle ANM=90°$,所以 $\angle AMN=90°$,所以 $AD\perp CF$,所以四边形 $AFDC$ 的面积为 $\frac{1}{2}CF\cdot DM+\frac{1}{2}CF\cdot AM=\frac{1}{2}CF\cdot(DM+AM)=\frac{1}{2}CF\cdot AD=\frac{1}{2}\times6\times6=18$。

7 2 【解析】EF 所在的直线为正方形 $ABCD$ 的一条对称轴。

8 D

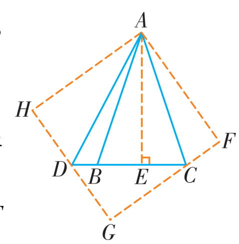
拔高题训练 正文 P108

1 A 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,$\therefore AB=BC=CD=AD$,$\angle B=\angle BCD=\angle D=\angle BAD=90°$。$\because\triangle AEF$ 等边三角形,$\therefore AE=EF=AF$,$\angle EAF=60°$。$\therefore\angle BAE+\angle DAF=30°$。在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 和 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中,$\begin{cases}AE=AF,\\AB=AD,\end{cases}\therefore\text{Rt}\triangle ABE\cong\text{Rt}\triangle ADF(\text{HL})$,$\therefore BE=DF$。$\because BC=CD$,$\therefore BC-BE=CD-DF$,即 $CE=CF$,$\therefore\triangle CEF$ 是等腰直角三角形。又 $\because AE=AF$,$\therefore AC$ 垂直平分 EF,$\therefore EG=GF$。$\because GH\perp CE$,$\therefore GH/\!/CF$,$\therefore\triangle EGH\backsim\triangle EFC$。$\because S_{\triangle EGH}=3$,$\therefore S_{\triangle EFC}=12$,$\therefore CF=2\sqrt{6}$,$EF=4\sqrt{3}$,$\therefore AF=4\sqrt{3}$。设 $AD=x$,则 $DF=x-2\sqrt{6}$。$\because AF^2=AD^2+DF^2$,$\therefore(4\sqrt{3})^2=x^2+(x-2\sqrt{6})^2$,$\therefore x=\sqrt{6}+3\sqrt{2}$ 或 $x=\sqrt{6}-3\sqrt{2}$(舍去),$\therefore AD=\sqrt{6}+3\sqrt{2}$,$DF=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$,$\therefore S_{\triangle ADF}=\frac{1}{2}AD\cdot DF=6$。故选 A。

2 D 【解析】因为 $DE/\!/CA$,$DF/\!/BA$,所以四边形 $AEDF$ 是平行四边形,故 A 选项正确。如果 $AD=EF$,四边形 $AEDF$ 是平行四边形,那么四边形 $AEDF$ 是矩形,故 B 选项正确。因为 AD 平分 $\angle EAF$,所以 $\angle EAD=\angle FAD$。又因为 $\angle FAD=\angle EDA$,所以 $\angle EAD=\angle EDA$,所以 $AE=DE$。又因为四边形 $AEDF$ 是平行四边形,所以四边形 $AEDF$ 是菱形,故 C 选项正确。如果 $AD\perp BC$ 且 $AB=AC$,四边形 $AEDF$ 是平行四边形,那么四边形 $AEDF$ 是菱形,故 D 选项错误。故选 D。

3 C 【解析】因为正方形 $ABCD$ 的面积为 24,所以 $BC=CD=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$。又因为 $BF=\frac{\sqrt{6}}{2}$,所以 $CF=2\sqrt{6}-\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$。因为四边形 $ABCD$ 为正方形,所以 $\angle C=90°$。在 $\text{Rt}\triangle CDF$ 中,$FC^2+CD^2=FD^2$,所以 $FD=\sqrt{FC^2+CD^2}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2+(2\sqrt{6})^2}=\frac{5\sqrt{6}}{2}$。又因为四边形 $ABCD$ 为正方形,所以 $\angle B=90°$,所以 $\angle EFB+\angle BEF=90°$。又因为四边形 $EFGH$ 为正方形,所以 $\angle EFG=90°$,所以 $\angle EFB+\angle DFC=90°$,所以 $\angle DFC=\angle BEF$,所以 $\triangle BEF\backsim\triangle CFD$,所以 $\frac{EF}{FD}=\frac{BF}{CD}$,所以 $EF=\frac{BF}{CD}\cdot FD=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{2\sqrt{6}}\times\frac{5\sqrt{6}}{2}=\frac{5\sqrt{6}}{8}$,所以正方形 $EFGH$ 的周长 $=4EF=\frac{5\sqrt{6}}{2}$。

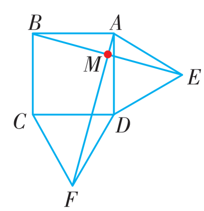
4 $2\sqrt{10}$ 【解析】过 A 作 $AE\perp DC$,垂足为 E,将 $\triangle AEC$ 沿 AC 翻折得 $\triangle AFC$,将 $\triangle ADE$ 沿 AD 翻折得 $\triangle ADH$,延长 FC,HD 交于 G,则 $\angle EAC=\angle CAF$,$\angle EAD=\angle HAD$,$\angle H=\angle F=90°$,$\therefore\angle EAC+\angle EAD=\angle CAF+\angle HAD$。$\because\angle DAC=45°$,即 $\angle EAC+\angle EAD=45°$,$\therefore\angle HAF=90°$,$\therefore$ 四边形 $AHGF$ 是矩形。$\because AH=AE$,$AE=AF$,$\therefore AH=AF$,$\therefore$ 四边形 $AHGF$ 是正方形,$\therefore AF=GH=GF$。$\because AB=AC$,$AE\perp BC$,$\therefore BE=EC=2$。由折叠得 $FC=EC=2$,$HD=DE=3$。设 $GC=x$,则 $FG=AF=HG=x+2$,$\therefore DG=x-1$。在 $\text{Rt}\triangle DGC$ 中,$DC^2=DG^2+GC^2$,即 $5^2=(x-1)^2+x^2$,解得 $x_1=4$,$x_2=-3$(舍),$\therefore AF=x+2=4+2=6$。在 $\text{Rt}\triangle ACF$ 中,$AC=\sqrt{AF^2+CF^2}=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$。故答案为:$2\sqrt{10}$。



第 4 题图

5 解:(1)$AF=BE$ $AF\perp BE$

理由如下:如图①所示,$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,$\therefore\angle BAD=\angle ADC=90°$,$AB=AD=CD$。$\because\triangle ADE$ 和 $\triangle DCF$ 都是等边三角形,$\therefore\angle DAE=\angle CDF=60°$,

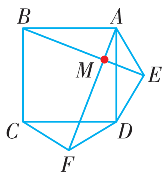


①

AE = AD, DF = CD, ∴ AE = DF, ∠BAE = ∠ADF = 150°。在△BAE 和△ADF 中, $\begin{cases} AB=AD, \\ \angle BAE=\angle ADF, \\ AE=DF, \end{cases}$

∴ △BAE ≌ △ADF (SAS), ∴ BE = AF, ∠ABE = ∠DAF。∵ ∠DAF + ∠BAF = 90°, ∴ ∠ABE + ∠BAF = 90°, ∴ ∠AMB = 90°, ∴ AF ⊥ BE。故答案为: AF = BE, AF ⊥ BE。

(2)结论仍然成立。证明:如图②所示,∵ 四边形 ABCD 是正方形,∴ BA = AD = DC, ∠BAD = ∠ADC = 90°。在△EAD 和△FDC 中, $\begin{cases} EA=FD, \\ ED=FC, \\ AD=DC, \end{cases}$ ∴ △EAD ≌ △FDC。



②

第 5 题图

∴ ∠EAD = ∠FDC。∴ ∠EAD + ∠BAD = ∠FDC + ∠ADC, 即∠BAE = ∠ADF。在△BAE 和△ADF 中, $\begin{cases} BA=AD, \\ \angle BAE=\angle ADF, \\ AE=DF, \end{cases}$ ∴ △BAE ≌△ADF。∴ BE = AF, ∠ABE = ∠DAF。∵ ∠DAF + ∠BAF = 90°, ∴ ∠ABE + ∠BAF = 90°, ∴ ∠AMB = 90°。∴ AF ⊥ BE。

6 (1)证明:因为四边形 ABCD 为正方形,所以 AB = AD, ∠DAB = 90°, 所以∠BAQ + ∠DAP = 90°。因为 DP ⊥ AQ, 所以∠APD = 90°, 所以∠ADP + ∠DAP = 90°, 所以 ∠ADP = ∠BAQ。因为 AQ ⊥ BE, 所以∠AQB = 90°, 所以∠DPA = ∠AQB, 所以△DAP ≌ △ABQ(AAS), 所以 AP = BQ。

(2)解: AQ 与 AP, DP 与 AP, AQ 与 BQ, DP 与 BQ。

第 19 章 一次函数

19.1 函数

19.1.1 变量与函数

变式题型

1 解:(1) $y=56-6t$。

(2)令 $y=0$, 得 $56-6t=0$, 解得 $t=\frac{28}{3}$。显然 $t\geqslant0$, 故自变量 t 的取值范围为 $0\leqslant t\leqslant\frac{28}{3}$。

2 3　6　10　$\frac{n(n+1)}{2}$　**【解析】**物体的总数等于各层物体数之和,每层物体的个数和它的层数有关。设物体的总数为 y, 第 1 层放 1 个, 第 2 层放 2 个, 第 3 层放 3 个, …, 第 n 层放 n 个, 则 $y=1+2+3+\cdots+n$。因为 $y=1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n$, 又 $y=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1$, 所以 $2y=\underbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)}_{n个(n+1)}=n(n+1)$。所以 $y=\frac{n(n+1)}{2}$。

3 解:(1)观察题表可知质量每增加 1 kg, 售价就增加2.4元, 这样的变化规律可以表示为 $y=2.4x$ $(0\leqslant x\leqslant8)$。

(2)将 $x=5.5$ 代入解析式, 得 $y=2.4\times5.5=13.2$(元), 即李大婶购买这种商品 5.5 kg, 应付 13.2 元钱。

拔高题训练 正文 P123

1 B　**【解析】**因为匀速行驶了一半的路程后将速度提高了 20 km/h, 所以前 1 h 行驶的路程为 40 km, 速度为 40 km/h, 所以以后的速度为 20 + 40 = 60(km/h), 行驶的时间为 $\frac{40}{60}\times60=40$(min), 故该车到达乙地的时间是当天上午 10:40。故选 B。

2 D　**【解析】**∵ 函数 $y=\begin{cases} x^2+2(x\leqslant2), \\ 2x(x>2), \end{cases}$ ∴ 把 $y=8$ 先代入上边的方程得 $x=\pm\sqrt{6}$, ∵ $x\leqslant2$, $x=\sqrt{6}$不合题意, 舍去, 故 $x=-\sqrt{6}$; 再代入下边的方程 $x=4$, ∵ $x>2$, 故 $x=4$ 符合题意。综上, x 的值为 4 或 $-\sqrt{6}$。故选 D。

3 $x>-2$ 且 $x\neq2$　**【解析】**由题意得 $x+2>0$ 且 $x-2\neq0$, 解得 $x>-2$ 且 $x\neq2$。故答案为: $x>-2$ 且 $x\neq2$。

4 50　**【解析】**在体育馆锻炼和在新华书店买书这两段时间内, 路程都没有变化, 即与 x 轴平行, 那么他共用去的时间是(35 − 15) + (80 − 50) = 50(min)。故答案为: 50。

5 解:(1)∵ 由表格可知, 销售单价每涨 10 元, 就少销售 5 kg, ∴ y 与 x 是一次函数关系, 且 y 与 x 的函数关系式为 $y=100-0.5(x-120)=-0.5x+160$。∵ 销售单价不低于 120 元/kg, 且不高于 180 元/kg, ∴ 自变量 x 的取值范围为 $120\leqslant x\leqslant180$。

(2)设销售利润为 w 元, 则 $w=(x-80)(-0.5x+160)=-\frac{1}{2}x^2+200x-12\ 800=-\frac{1}{2}(x-200)^2+7\ 200$。∵ $a=-\frac{1}{2}<0$, ∴ 当 $x<200$ 时, y 随 x 的增大而增大, ∴ 当 $x=180$ 时, 销售利润最大, 最大利润是 $w=-\frac{1}{2}(180-200)^2+7\ 200=7\ 000$(元)。

答:当销售单价为 180 元时, 销售利润最大, 最大利润是 7 000 元。

6 解:当 $BP\leqslant\frac{1}{2}BC$,即 $0<x\leqslant2$ 时,$y=S_{正方形PQRS}=PQ^2=BP^2=x^2$;当 $\frac{1}{2}BC<BP\leqslant BC$,即 $2<x\leqslant4$ 时,$PC=4-x$,$DC=2$,记 AD 与 SP 的交点为 M,则 $y=S_{矩形PCDM}=(4-x)\times2=8-2x$。故 $y=\begin{cases}x^2(0<x\leqslant2),\\8-2x(2<x\leqslant4)。\end{cases}$

19.1.2 函数的图像

变式题型

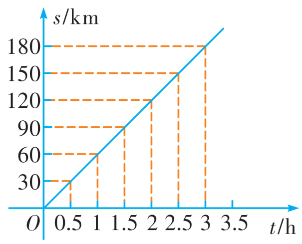
1 D

2 解:(1)解析式法:$s=60t(t\geqslant0)$。

(2)列表法:

t/h	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	…
s/km	0	30	60	90	120	150	180	…

(3)图像法:如图所示。



变式 2 图

3 解:(1)甲地与乙地相距 100 km,骑摩托车的人用了 2 h 到达乙地,骑自行车的人用了 6 h 到达乙地,骑摩托车的人先到乙地,早到了 1 h。

(2)骑自行车的人先匀速行驶了 2 h,又休息了 1 h,然后又匀速行驶了 3 h 到达乙地,骑摩托车的人在骑自行车的人出发 3 h 后出发,匀速行驶 2 h 到达乙地。

(3)摩托车行驶的平均速度是 $100\div2=50$(km/h)。

4 解:$y=S_{正方形ABCD}-S_{Rt\triangle ABE}-S_{Rt\triangle ADF}-S_{Rt\triangle CEF}=BC^2-\frac{1}{2}AB\cdot BE-\frac{1}{2}AD\cdot DF-\frac{1}{2}EC\cdot FC=4^2-\frac{1}{2}\times4\times(4-x)-\frac{1}{2}\times4\times(4-x)-\frac{1}{2}x\cdot x=-\frac{1}{2}x^2+4x$,其中 $0\leqslant x\leqslant4$。

拔高题训练 正文 P132

1 D 【解析】根据题意可知,刚开始时由于实心长方体在水槽里,底面积减小,水面上升的速度较快;水淹没实心长方体后一直到水注满,底面积等于圆柱体的底面积,水面上升的速度较慢,故选 D。

2 D 【解析】A. 惊蛰白昼时长为 11.5 h,高于 11 h,不符合题意;B. 小满白昼时长为 14.5 h,高于 11 h,不符合题意;C. 立秋白昼时长为 14 h,高于 11 h,不符合题意;D. 大寒白昼时长为 9.8 h,低于 11 h,符合题意,故选 D。

3 列表法、图像法、解析式法 【解析】函数表示两个变量的变化关系,有三种方式:列表法、图像法、解析式法。故答案为:列表法、图像法、解析式法。

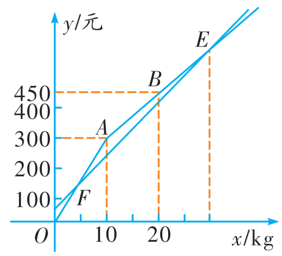
4 解:(1)$y=5x+3$

(2)根据题意,得 $y=(x-7)^2+m$。把(10,11)代入,得 $9+m=11$,$\therefore m=2$。$\therefore$ 当 $x>3$ 时,y 与 x 之间的函数关系式为 $y=(x-7)^2+2$。

5 解:(1)甲、乙两采摘园优惠前的草莓销售价格是每千克 $\frac{300}{10}=30$(元)。故答案为:30。

(2)由题意 $y_1=30\times0.6x+60=18x+60$,由图可得:当 $0\leqslant x\leqslant10$ 时,$y_2=30x$;当 $x>10$ 时,设 $y_2=kx+b$,将(10,300)和(20,450)代入 $y_2=kx+b$,解得 $y_2=15x+150$,所以 $y_2=\begin{cases}30x(0\leqslant x\leqslant10),\\15x+150(x>10)。\end{cases}$

(3)函数 y_1 的图像如图所示,

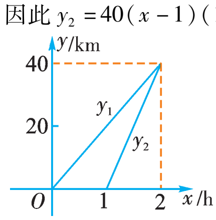


第 5 题图

由 $\begin{cases}y=18x+60,\\y=30x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=5,\\y=150,\end{cases}$ 所以点 F 的坐标为(5,150)。由 $\begin{cases}y=18x+60,\\y=15x+150,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=30,\\y=600,\end{cases}$ 所以点 E 的坐标为(30,600)。由图像可知,选择甲采摘园所需总费用较少时 $5<x<30$。

6 解:(1)因为爸爸骑车的速度是 20 km/h,爸爸的骑行时间为 x h,一共行驶 40 km,所以 $y_1=20x(0\leqslant x\leqslant2)$。李玉刚同学和妈妈晚走一个小时,乘车速度是 40 km/h,因此 $y_2=40(x-1)(1\leqslant x\leqslant2)$。

(2)如图。



第 6 题图

(3)观察(2)中的图像可知,他们同时到达老家。

19.2 一次函数

19.2.1 正比例函数

变式题型

1 B 【解析】根据题意得 $m^2-3=1$ 且 $2-m\neq0$,解得 $m=\pm2$ 且 $m\neq2$,所以 $m=-2$,故选 B。

2 解:(1)折线 AOD 的函数解析式是:当 $x<0$ 时,$y=$

$-x$；当 $x\geqslant 0$ 时，$y=\frac{2}{5}x$，即 $y=\begin{cases}-x(x<0),\\ \frac{2}{5}x(x\geqslant 0)。\end{cases}$

(2)因为 x 轴是线段 AB 的垂直平分线，所以 $AB=4$。又易得 $AD=7$，因此矩形 $ABCD$ 的周长是 22，面积是 28。

拔高题训练 正文 P140

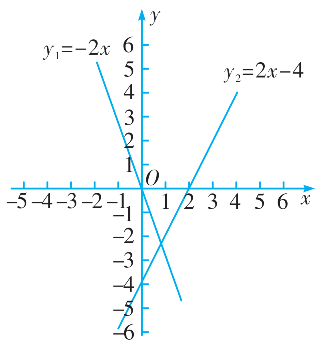
1 A 【解析】正比例函数的图像是一条经过原点的直线，且当 $k>0$ 时，经过第一、三象限。故选 A。

2 B 【解析】根据图像，得 $2k<6$ 且 $3k>5$，解得 $k<3$ 且 $k>\frac{5}{3}$，所以 $\frac{5}{3}<k<3$。只有 B 符合，故选 B。

3 $\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{3}$ 【解析】根据题意可得 $2a+b=1$，$a+2b=0$，解得 $a=\frac{2}{3}$，$b=-\frac{1}{3}$。故答案为：$\frac{2}{3}$；$-\frac{1}{3}$。

4 解：(1)当 $x=0$ 时，$y_2=-4$；当 $y_2=0$ 时，$x=2$，

∴ 一次函数 $y_2=2x-4$ 的图像与 x 轴的交点为(2，0)，与 y 轴的交点为(0，-4)，图像如下：



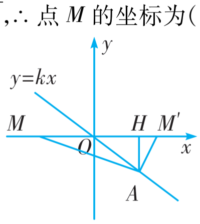
第 4 题图

(2)由图像得交点为(1，-2)，若 $y_2<y_1$，则 x 的取值范围是 $x<1$。故答案为：$x<1$。

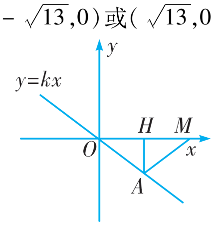
5 解：(1)∵ 点 A 的横坐标为 3，$\triangle AOH$ 的面积为 3，点 A 在第四象限，∴ 点 A 的坐标为(3，-2)。将 $A(3,-2)$ 代入 $y=kx$，得 $-2=3k$，解得 $k=-\frac{2}{3}$，

∴ 正比例函数的表达式为 $y=-\frac{2}{3}x$。

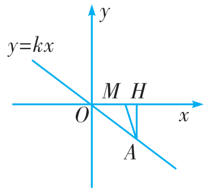
(2)①当 $OM=OA$ 时，如图①所示，∵ 点 A 的坐标为(3，-2)，∴ $OH=3$，$AH=2$，$OA=\sqrt{OH^2+AH^2}=\sqrt{13}$，∴ 点 M 的坐标为$(-\sqrt{13},0)$或$(\sqrt{13},0)$；



①



②



③

第 5 题图

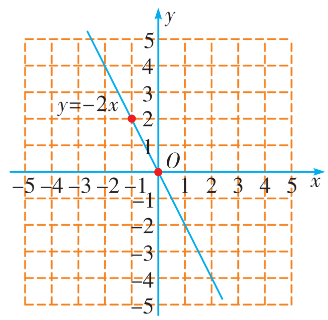
②当 $AO=AM$ 时，如图②所示，∵ 点 H 的坐标为(3，0)，∴ 点 M 的坐标为(6，0)；

③当 $OM=MA$ 时，如图③所示，设 $OM=x$，则 $MH=3-x$，∵ $OM=MA$，∴ $x=\sqrt{(3-x)^2+2^2}$，解得 $x=\frac{13}{6}$，∴ 点 M 的坐标为$\left(\frac{13}{6},0\right)$。

综上所述：当点 M 的坐标为$(-\sqrt{13},0)$，$(\sqrt{13},0)$，(6，0)或$\left(\frac{13}{6},0\right)$时，$\triangle AOM$ 是等腰三角形。

6 解：(1)设 $y=kx$，根据题意得 $2k=-4$，解得 $k=-2$，所以 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=-2x$。

(2)函数的图像如图。



第 6 题图

(3)把$(a,-2)$代入 $y=-2x$ 得 $-2a=-2$，解得 $a=1$。

(4)当 $x=-1$ 时，$y=-2\times(-1)=2$；当 $x=5$ 时，$y=-2\times 5=-10$，所以当 $-1<x<5$ 时，$-10<y<2$。

19.2.2 一次函数

变式题型

1 A 【解析】(1)若 $m>0$，则 y 随 x 的增大而增大，则 $x=-1$ 时，y 最小，所以当 $x=-1$ 时，$y=-m+2m-7>0$，所以 $m>7$。

(2)若 $m<0$，则 y 随 x 的增大而减小，则 $x=5$ 时，y 最小，所以当 $x=5$ 时，$y=5m+2m-7>0$，得 $m>1$。因为 $m>1$ 和 $m<0$ 矛盾(排除)，所以 $m>7$。

2 $y=-5x+5$ 【解析】∵ 点 $P(1,2)$ 关于 x 轴的对称点为 P'，∴ $P'(1,-2)$。∵ P' 在直线 $y=kx+3$ 上，∴ $-2=k+3$，解得 $k=-5$，则 $y=-5x+3$，∴ 把直线 $y=kx+3$ 向上平移 2 个单位，所得的直线解析式为 $y=-5x+5$。故答案为：$y=-5x+5$。

3 解：(1)设所求的一次函数的解析式为 $y=kx+b$

$(k\neq 0)$。由题意得 $\begin{cases}5\ 000k+b=28\ 500,\\ 8\ 000k+b=36\ 000。\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\dfrac{5}{2},\\ b=16\ 000。\end{cases}$ 所以所求的一次函数的解析式为 $y=\dfrac{5}{2}x+16\ 000$。

(2)因为 $48\ 000=\dfrac{5}{2}x+16\ 000$，所以 $x=12\ 800$。即能印该读物 12 800 册。

4 解:(1)设当 $x\leqslant 40$ 时,y 与 x 的函数关系式为 $y=kx+b\ (k\neq 0)$，依图像过(10,2 000)，(30,3 000)两点知 $\begin{cases}2\ 000=10k+b,\\ 3\ 000=30k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=50,\\ b=1\ 500。\end{cases}$ 即当 $x\leqslant 40$ 时,y 与 x 的函数关系式为 $y=50x+1\ 500$。当 $x=40$ 时,$y=3\ 500$。当 $x>40$ 时，依题意得 $y=100(x-40)+3\ 500$，即当 $x>40$ 时,y 与 x 的函数关系式为 $y=100x-500$。

(2)因为当 $x\leqslant 40$ 时,$y=50x+1\ 500$ 中 y 随 x 增大而增大，所以当 $x=40$ 时，其最大值为 $y=50\times 40+1\ 500=3\ 500$。令 $y\geqslant 4\ 000$，解不等式 $100x-500\geqslant 4\ 000$，得 $x\geqslant 45$。所以，应从第 45 天开始进行人工灌溉。

5 解:(1)根据题意，得 $\begin{cases}2k+b=4,\\ b=2。\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\ b=2。\end{cases}$ 所以此一次函数的关系式为 $y=x+2$。

(2)由(1)知一次函数的关系式为 $y=x+2$。令 $y=0$，得 $0=x+2$，解得 $x=-2$。所以 C 点的坐标为 $(-2,0)$。所以 $OC=|-2|=2$。作 $AD\perp x$ 轴，垂足为点 D，则 $AD=4$。所以 $S_{\triangle AOC}=\dfrac{1}{2}\cdot OC\cdot AD=\dfrac{1}{2}\times 2\times 4=4$。

拔高题训练

正文 P155

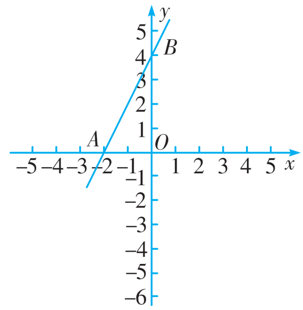
1 A 【解析】表示 y 是 x 的一次函数的图像是一条直线，观察选项，只有 A 选项符合题意。故选 A。

2 C 【解析】根据程序框图可得 $y=(-x)\times 3+2$，化简，得 $y=-3x+2$,$y=-3x+2$ 的图像与 y 轴的交点为(0,2)，与 x 轴的交点为 $\left(\dfrac{2}{3},0\right)$。故选 C。

3 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】由图形可知:$\triangle OAB$ 是等腰直角三角形,$OA=OB$。$\because AB=2,OA^2+OB^2=AB^2$，$\therefore OA=OB=\sqrt{2}$，$\therefore A$ 点坐标是 $(\sqrt{2},0)$，B 点坐标是 $(0,\sqrt{2})$。$\because$ 一次函数 $y=kx+b$ 的图像与 x 轴、y 轴分别相交于 A,B 两点，$\therefore$ 将 A,B 两点坐标代入 $y=kx+b$，得 $k=-1,b=\sqrt{2}$，$\therefore \dfrac{k}{b}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。故答案为:$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

4 $-2\leqslant x\leqslant 1$ 【解答】根据图像和图中数据可知，同时满足 $y_1\geqslant 0,y_2\geqslant 0$ 时 x 的取值范围是 $-2\leqslant x\leqslant 1$。

5 解:(1)当 $x=0$ 时,$y=4$；当 $y=0$ 时,$x=-2$，则函数的图像如图所示。



第 5 题图

(2)由(1)可知 $A(-2,0)$，$B(0,4)$。

(3)$S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}\times 2\times 4=4$。

(4)$x<-2$。

6 解:(1)由题意得甲的骑行速度为 $\dfrac{1\ 020}{\left(\dfrac{21}{4}-1\right)}=240(\text{m/min})$，$240\times(11-1)\div 2=1\ 200(\text{m})$，$1\ 200\div 240+1=6(\text{min})$，则点 M 的坐标为(6,1 200)，故答案为:240,(6,1 200)。

(2)设直线 MN 的解析式为 $y=kx+b(k\neq 0)$，$\because y=kx+b(k\neq 0)$ 的图像过点 $M(6,1\ 200)$，$N(11,0)$，$\therefore \begin{cases}6k+b=1\ 200,\\ 11k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-240,\\ b=2\ 640。\end{cases}$ $\therefore$ 直线 MN 的解析式为 $y=-240x+2\ 640$，即甲返回时距 A 地的路程 y 与时间 x 之间的函数关系式为 $y=-240x+2\ 640$。

(3)设甲返回 A 地之前，经过 x min 两人距 C 地的路程相等，且乙的速度为 $1\ 200\div 20=60(\text{m/min})$，

第 6 题图

如图所示，$\because AB=1\ 200$ m,$AC=1\ 020$ m,$\therefore BC=1\ 200-1\ 020=180(\text{m})$，分五种情况:

①当 $0<x\leqslant 3$ 时,$1\ 020-240x=180-60x$,$x=\dfrac{14}{3}>3$，此种情况不符合题意;

②当 $3<x\leqslant\dfrac{21}{4}-1$，即 $3<x<\dfrac{17}{4}$ 时，甲、乙都在 A,C 之间,$\therefore 1\ 020-240x=60x-180$,$x=4$;

③当 $\dfrac{21}{4}<x<6$ 时，甲在 B,C 之间，乙在 A,C 之间，$\therefore 240(x-1)-1\ 020=60x-180$,$x=6$，此种情况不符合题意;

④当 $x=6$ 时，甲到 B 地，距离 C 地 180 m，乙距 C 地的距离为 $6\times 60-180=180(\text{m})$，即 $x=6$ 时两人距 C 地的路程相等;

⑤当 $x>6$ 时，甲在返回途中，当甲在 B,C 之间时，$180-[240(x-1)-1\ 200]=60x-180$,$x=6$，此种情况不符合题意；当甲在 A,C 之间时,$240(x-1)-1\ 200-180=60x-180$,$x=8$。

综上所述，在甲返回 A 地之前，经过 4 min 或 6 min 或 8 min 时两人距 C 地的路程相等。

19.2.3 一次函数与方程、不等式

变式题型

1 $x=2$ 【解析】$\because ax+b=0$ 的解为一次函数 $y=ax+b$ 的图像与 x 轴的交点的横坐标，$\therefore$ 关于 x 的方程 $ax+b=0$ 的解为 $x=2$。

2 解：(1) $y_甲=0.1x+6$　$y_乙=0.12x$

(2) 当选择乙种印刷方式合算时，$y_甲>y_乙$，即 $0.1x+6>0.12x$。解得 $x<300$。所以当 $100\leqslant x<300$ 时，选择乙种印刷方式较合算。当两种印刷方式同样合算时，$y_甲=y_乙$，即 $0.1x+6=0.12x$，解得 $x=300$。所以当 $x=300$ 时，选择甲、乙两种印刷方式都可以。当选择甲种印刷方式合算时，$y_甲<y_乙$。即 $0.1x+6<0.12x$，解得 $x>300$。所以当 $300<x\leqslant 450$ 时，选择甲种印刷方式较合算。

3 解：对于直线 $y=\frac{1}{2}(x+1)$，令 $y=0$，得 $\frac{1}{2}(x+1)=0$，解得 $x=-1$。因此直线 $y=\frac{1}{2}(x+1)$ 与 x 轴的交点坐标是 $A(-1,0)$。把 $(-1,0)$ 代入函数解析式 $y=-\frac{1}{2}(3x-b)$，得 $-\frac{1}{2}\times[3\times(-1)-b]=0$，解得 $b=-3$。所以 $y=-\frac{1}{2}(3x-b)=-\frac{1}{2}(3x+3)$。直线 $y=\frac{1}{2}(x+1)$ 与 y 轴的交点坐标是 $B\left(0,\frac{1}{2}\right)$，直线 $y=-\frac{1}{2}(3x+3)$ 与 y 轴的交点坐标是 $C\left(0,-\frac{3}{2}\right)$，因此线段 BC 的长度是 $\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)=2$。又因为 $OA=1$，所以 $\triangle ABC$ 的面积是 $\frac{1}{2}\times2\times1=1$。

4 解：(1) 因为直线 $y=kx-1$ 与 y 轴相交于点 C，所以点 C 的坐标是 $(0,-1)$，所以 $OC=1$。因为 $3OB-\frac{1}{2}OC=1$，所以 $OB=\frac{1}{2}$。所以点 B 的坐标为 $\left(\frac{1}{2},0\right)$。把点 B 的坐标 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 代入 $y=kx-1$，得 $k=2$。

(2) 因为 $S=\frac{1}{2}OB\cdot y$，$y=2x-1$，所以 $S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times(2x-1)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$，即 $\triangle AOB$ 的面积 S 与 x 之间的函数解析式为 $S=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$。

(3) ①当 $S=\frac{1}{4}$ 时，有 $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$，解得 $x=1$。所以 $y=2x-1=1$。所以当点 A 的坐标为 $(1,1)$ 时，$\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{1}{4}$。

②存在。满足条件的所有点 P 的坐标分别为 $P_1(1,0)$，$P_2(2,0)$，$P_3(0,1)$，$P_4(0,2)$。

拔高题训练

正文 P168

1 C 【解析】$\because$ 直线 l 经过第一、二、四象限，$\therefore \begin{cases} m-3<0, \\ m+2>0, \end{cases}$ 解得 $-2<m<3$，故选 C。

2 C 【解析】令 $x=0$，则函数 $y=kx+k^2+1$ 的图像与 y 轴交于点 $(0,k^2+1)$。$\because k^2+1>0$，$\therefore$ 图像与 y 轴的交点在 y 轴的正半轴上。故选 C。

3 3 【解析】根据一次函数的定义可知 $k-2=1$，解得 $k=3$。故答案为：3。

4 $y=\frac{10}{9}x-\frac{10}{3}$ 【解析】设直线 l 和八个正方形最上面一个正方形的交点为 A，过 A 作 $AB\perp x$ 轴，垂足为 B，过 A 作 $AC\perp y$ 轴，垂足为 C。$\because$ 正方形的边长为 1，$\therefore OB=3$。$\because$ 经过原点的一条直线 l 将这八个正方形分成面积相等的两部分，$\therefore$ 直线 l 两旁正方形的面积和都是 4，$\therefore \triangle ABO$ 的面积是 5，$\therefore \frac{1}{2}OB\cdot AB=5$，$\therefore AB=\frac{10}{3}$，$\therefore OC=\frac{10}{3}$，由此可知直线 l 经过点 $\left(3,\frac{10}{3}\right)$。设直线 l 的函数关系式为 $y=kx$，则 $\frac{10}{3}=3k$，$k=\frac{10}{9}$，$\therefore$ 直线 l 的函数关系式为 $y=\frac{10}{9}x$，$\therefore$ 将直线 l 向右平移 3 个单位长度后所得直线 l' 的函数关系式为 $y=\frac{10}{9}x-\frac{10}{3}$。故答案为：$y=\frac{10}{9}x-\frac{10}{3}$。

5 解：(1) 7

(2) 当 $x>2$ 时，设 y 与 x 的函数关系式为 $y=kx+b$，代入 $(2,7)$，$(4,10)$ 得 $\begin{cases} 2k+b=7, \\ 4k+b=10, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=\frac{3}{2}, \\ b=4, \end{cases}$ $\therefore y$ 与 x 的函数关系式为 $y=\frac{3}{2}x+4$。

(3) 把 $x=18$ 代入函数关系式 $y=\frac{3}{2}x+4$，得 $y=\frac{3}{2}\times18+4=31$。

答：这位乘客需付出租车车费 31 元。

6 解：(1) $\because$ 当 $x=m+1$ 时，$y=m+1-2=m-1$，$\therefore$ 点 $P(m+1,m-1)$ 在函数 $y=x-2$ 的图像上。

(2) $\because$ 函数 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 的图像与 x 轴、y 轴分别相交于点 A，B，$\therefore A(6,0)$，$B(0,3)$。$\because$ 点 P 在 $\triangle AOB$ 的内部，$\therefore 0<m+1<6$，$0<m-1<3$，$m-1<-\frac{1}{2}(m+1)+3$，$\therefore 1<m<\frac{7}{3}$。

19.3 课题学习 选择方案

变式题型

1 解:(1)设 l_1 对应的函数解析式为 $y=k_1x(k_1\neq0)$。因为 l_1 过点(30,600),所以 $k_1=20$,所以 $y=20x$。设 l_2 对应的函数解析式为 $y=k_2x+b(k_2\neq0)$。因为 l_2 过点(0,300)和点(30,600),所以 $b=300$,$k_2=10$,所以 $y=10x+300$。所以 l_1 对应的函数解析式为 $y=20x$,l_2 对应的函数解析式为 $y=10x+300$。

(2)由图像知,l_1 对应的函数表示没有推销出产品就没有推销费,每推销 10 件产品得 200 元推销费;l_2 对应的函数表示有保底工资 300 元,每推销 10 件产品再获得 100 元提成。

(3)若业务能力强,保证平均每月推销多于 30 件产品,就选择 l_1 对应的函数的付费方案;否则,选择 l_2 对应的函数的付费方案。

2 解:(1)设商场应购进 A 型台灯 x 盏,则购进 B 型台灯 $(100-x)$ 盏,根据题意,得 $30x+50(100-x)=3\,500$,解得 $x=75$。所以 $100-75=25$(盏)。答:应购进 A 型台灯 75 盏,B 型台灯 25 盏。

(2)设商场销售完这批台灯可获利 y 元,则 $y=(45-30)x+(70-50)(100-x)=15x+2\,000-20x=-5x+2\,000$。因为 B 型台灯的进货数量不超过 A 型台灯进货数量的 3 倍,所以 $100-x\leqslant3x$,解得 $x\geqslant25$。因为 $k=-5<0$,所以当 $x=25$ 时,y 取得最大值,为 $-5\times25+2\,000=1\,875$。

答:商场购进 A 型台灯 25 盏,B 型台灯 75 盏,销售完这批台灯时获利最多,此时利润为 1 875 元。

3 解:(1)8 060 7 000

(2)$y=\begin{cases}2.5x(0\leqslant x\leqslant3\,000),\\7\,500+2.8(x-3\,000)(x>3\,000)。\end{cases}$

(3)因为缴纳水费 7 640 元,所以用水量应超过 3 000 t,令 $7\,500+2.8(x-3\,000)=7\,640$,解得 $x=3\,050$。故该单位这个月的用水量是 3 050 t。

拔高题训练 正文 P174

1 D 【解析】①当 $t=0$ 时,$y=1\,400$,∴ 打电话时,小东和妈妈的距离为 1 400 m,结论①正确;②$2\,400\div(22-6)-100=50$(m/min),∴ 小东和妈妈相遇后,妈妈回家的速度为 50 m/min,结论②正确;③∵ t 的最大值为 27,∴ 小东打完电话后,经过 27 min 到达学校,结论③正确;④$2\,400+(27-22)\times100=2\,900$(m),∴ 小东家离学校的距离为 2 900 m,结论④正确。综上所述,正确的结论有①②③④。故选 D。

2 A 【解析】由图可得,甲步行的速度为 $240\div4=60$(m/min),故①正确;乙走完全程用的时间为 $2\,400\div(16\times60\div12)=30$(min),故②错误;乙追上甲用的时间为 $16-4=12$(min),故③错误;乙到达终点时,甲离终点的距离是 $2\,400-(4+30)\times60=360$(m),故④错误。故选 A。

3 29 【解析】设购买 A 种型号盒子 x 个,购买盒子所需要费用为 y 元,则购买 B 种盒子的个数为 $\frac{15-2x}{3}$。①当 $0\leqslant x<3$ 时,$y=5x+\frac{15-2x}{3}\times6=x+30$,∵ $k=1>0$,∴ y 随 x 的增大而增大,∴ 当 $x=0$ 时,y 有最小值,最小值为 30;②当 $x\geqslant3$ 时,$y=5x+\frac{15-2x}{3}\times6-4=26+x$,∵ $k=1>0$,∴ y 随 x 的增大而增大,∴ 当 $x=3$ 时,y 有最小值,最小值为 29。综合①②可得,购买盒子所需要最少费用为 29 元。故答案为:29。

4 $\frac{16}{5}$ 【解析】由图像可得:$y_{甲}=4t(0\leqslant t\leqslant5)$,$y_{乙}=\begin{cases}2(t-1)(1\leqslant t\leqslant2),\\9t-16(2<t\leqslant4)。\end{cases}$由方程组 $\begin{cases}y=4t,\\y=9t-16,\end{cases}$ 解得 $t=\frac{16}{5}$。故答案为:$\frac{16}{5}$。

5 解:(1)在直线 $y=-\frac{3}{8}x-\frac{39}{8}$ 中,令 $y=0$,则有 $0=-\frac{3}{8}x-\frac{39}{8}$,∴ $x=-13$,∴ $C(-13,0)$。令 $x=-5$,则有 $y=-\frac{3}{8}\times(-5)-\frac{39}{8}=-3$,∴ $E(-5,-3)$。∵ 点 B,E 关于 x 轴对称,∴ $B(-5,3)$。∵ $A(0,5)$,∴ 设直线 AB 的解析式为 $y=kx+5$,∴ $-5k+5=3$,∴ $k=\frac{2}{5}$,∴ 直线 AB 的解析式为 $y=\frac{2}{5}x+5$。

(2)由(1)知 $E(-5,-3)$,∴ $DE=3$。∵ $C(-13,0)$,$D(-5,0)$,∴ $CD=-5-(-13)=8$,∴ $S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}CD\cdot DE=12$。由题意知 $OA=5$,$OD=5$,$BD=3$,∴ $S_{四边形ABDO}=\frac{1}{2}(BD+OA)\cdot OD=20$,∴ $S=S_{\triangle CDE}+S_{四边形ABDO}=12+20=32$。

(3)由(2)知 $S=32$,在△AOC 中,$OA=5$,$OC=13$,∴ $S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}OA\cdot OC=\frac{65}{2}=32.5$,∴ $S\neq S_{\triangle AOC}$。理由:由(1)知,直线 AB 的解析式为 $y=\frac{2}{5}x+5$,令 $y=0$,则 $0=\frac{2}{5}x+5$,∴ $x=-\frac{25}{2}\neq-13$,∴ 点 C 不在直线 AB 上,即点 A,B,C 不在同一条直线上,∴ $S_{\triangle AOC}\neq S$。

6 解:(1)根据题意,得 $y=400x+500(100-x)=$

$-100x+50\ 000$。

(2)$\because 100-x\leqslant 2x$，$\therefore x\geqslant \frac{100}{3}$。$\because y=-100x+50\ 000$中$k=-100<0$，$\therefore y$随$x$的增大而减小。又$\because x$为整数，$\therefore x=34$时，$y$取得最大值，最大值为46 600。

答：该商店购进A型电脑34台、B型电脑66台，才能使销售总利润最大，最大利润是46 600元。

(3)根据题意得$y=(400+a)x+500(100-x)$，即$y=(a-100)x+50\ 000$，$33\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 60$且$x$为整数。

①当$0<a<100$时，y随x的增大而减小，$\therefore$当$x=34$时，y取最大值，即商店购进34台A型电脑和66台B型电脑的销售利润最大；

②$a=100$时，$a-100=0$，$y=50\ 000$，即商店购进A型电脑数量满足$33\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 60$的整数时，均获得最大利润；

③当$100<a<200$时，$a-100>0$，y随x的增大而增大，$\therefore$当$x=60$时，y取得最大值，即商店购进60台A型电脑和40台B型电脑的销售利润最大。

第20章 数据的分析

20.1 数据的集中趋势

变式题型

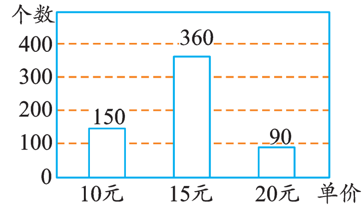
1 C 【解析】$\because$ 100名学生中持“反对”和“无所谓”意见的共有30名学生，$\therefore$持“赞成”意见的学生人数为$100-30=70$，$\therefore$全校持“赞成”意见的学生人数约为$2\ 400\times\frac{70}{100}=1\ 680$。故选C。

2 解：(1)甲队游客年龄的平均数为$\frac{1}{10}(13+13+14+15+15+15+15+16+17+17)=15$，众数为15，中位数为15；乙队游客年龄的平均数为$\frac{1}{10}(5+6+6+7+7+8+8+8+46+49)=15$，众数为8，中位数为7.5。

(2)甲队游客年龄的平均数能代表他们的年龄特征，乙队游客年龄的平均数不能代表他们的年龄特征。对于乙队游客而言，10人中有8人的年龄在9岁以下，而说他们的平均年龄是15岁，会让人误认为这队游客的年龄都在15岁左右，所以乙队的平均数不能代表该队游客年龄的特征。可选用中位数或众数来代表乙队游客的年龄特征。

3 解：(1)$90\div 15\%\times 25\%=150$。

补全的条形统计图如图所示，



变式3图

(2)小亮的计算方法不正确。正确结果为：$20\times 15\%+10\times 25\%+15\times 60\%=14.5$(元)。

4 解：我们从多角度来综合考虑这个问题：

(1)甲组成绩的众数是90，乙组成绩的众数是70，从成绩的众数来看，甲组成绩好些。

(2)甲、乙两组成绩的中位数都是80，甲组成绩在中位数以上(包括中位数)的有33人，乙组成绩在中位数以上(包括中位数)的有26人，从这一角度看，甲组成绩总体较好。

另外，我们还可以从高分段人数进行考虑，从成绩统计看：甲组成绩高于80分的人数为$14+6=20$(人)，乙组成绩高于80分的人数为$12+12=24$(人)，所以乙组成绩集中在高分段的人数多，同时乙组得满分的人数也要多一些，从这一角度看，乙组成绩较好。

拔高题训练

正文P193

1 A 【解析】由扇形统计图可知，购买课外书花费为100元的同学有$20\times 10\%=2$(人)，购买课外书花费为80元的同学有$20\times 25\%=5$(人)，购买课外书花费为50元的同学有$20\times 40\%=8$(人)，购买课外书花费为30元的同学有$20\times 20\%=4$(人)，购买课外书花费为20元的同学有$20\times 5\%=1$(人)，20个数据从大到小排列为100，100，80，80，80，80，80，50，50，50，50，50，50，50，50，30，30，30，30，20，在这20个数据中，众数为50，中位数为$(50+50)\div 2=50$，故选A。

2 B 【解析】$\because$他们的月平均工资是1.11万元，$\therefore \frac{1}{10}(1\times 2.5+2\times 1.5+2\times 1+4x+1\times 0.4)=1.11$，解得$x=0.8$，$\therefore$该公司工作人员的月工资的中位数是$\frac{1}{2}(1+0.8)=0.9$，众数是0.8，故选B。

3 6 【解析】$\because$数据x_1,x_2,x_3,x_4,x_5的平均数是3，$\therefore x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=15$，则新数据$x_1+1,x_2+2,x_3+3,x_4+4,x_5+5$的平均数为$\frac{x_1+1+x_2+2+x_3+3+x_4+4+x_5+5}{5}=\frac{15+15}{5}=6$，故答案为：6。

4 88.5 【解析】根据统计图可知，这10名选手成绩的平均分为$\frac{2\times 80+1\times 85+5\times 90+2\times 95}{10}=88.5$(分)，故答案为88.5。

5 解:(1)9

(2)11　12

(3)乙同学所抽取的样本能更好地反映此次植树活动情况,$(3\times6+6\times7+3\times8+12\times9+6\times10)\div30\times200=1\ 680$(棵)。

答:估计本次活动200名同学一共植树1 680棵。

6 解:(1)由图形可知众数是7,中位数是6.5,平均数 $\bar{x}=\frac{1\times3+3\times4+4\times5+7\times6+8\times7+3\times8+2\times9+2\times10}{30}=\frac{195}{30}=6.5$。

(2)一等奖奖品的单价为 $2\ 000\times20\%\div2=200$(元),二等奖奖品的单价为 $2\ 000\times40\%\div(3+2)=160$(元),三等奖奖品的单价为 $2\ 000\times40\%\div8=100$(元)。

答:一、二、三等奖奖品的单价分别为200元、160元、100元。

(3)$\frac{450}{30}\times2\ 000=30\ 000$(元),$450\times\frac{2}{30}\times200=6\ 000$(元)。

答:预测该专业学院将会拿出30 000元奖金来奖励学生,其中一等奖奖金为6 000元。

20.2 数据的波动程度

变式题型

1 解:极差为 $9.1-8.0=1.1$。

$\bar{x}=\frac{1}{7}\times(8.0+8.3+9.1+8.5+8.2+8.4+9.0)=8.5$,方差为 $s^2=\frac{1}{7}\times[(8.0-8.5)^2+(8.3-8.5)^2+\cdots+(9.0-8.5)^2]\approx0.14$。

标准差 $s=\sqrt{s^2}\approx0.38$。

2 6 【解析】∵ 数据 $m,n,6$ 与 $1,m,2n,7$ 的平均数都是6,∴ $\begin{cases}\frac{m+n+6}{3}=6,\\ \frac{1+m+2n+7}{4}=6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=8,\\ n=4,\end{cases}$

∴ 这组新数据的方差是 $\frac{(8-6)^2+(4-6)^2+(6-6)^2+(1-6)^2+(8-6)^2+(8-6)^2+(7-6)^2}{7}=6$,故答案为:6。

3 解:(1)如下表:

姓名	极差	平均成绩	中位数	众数	方差
小王	30	85	80	80	120
小李	20	85	85	85	40

(2)小李

(3)如果只考虑获奖,派小李去有把握些,因为小李较小王的成绩稳定;如果要考虑获金牌,派小王去可能性大些,因为在最近的五次选拔测试中,小王有两次成绩达到95分以上(含95分),而小李只有一次。

拔高题训练

正文 P201

1 D 【解析】从表中可知,跳绳的平均成绩都是135次,(1)不正确;甲班的方差大于乙班的方差,说明甲班的波动大,所以(2)正确;甲班的中位数是149,乙班的中位数是151,而平均数都为135,说明乙班的优秀人数多于甲班的优秀人数,(3)正确。故选D。

2 A 【解析】甲的平均成绩 $=(7\times4+8\times6+9\times6+10\times4)\div20=8.5$,乙的平均成绩 $=(7\times6+8\times4+9\times4+10\times6)\div20=8.5$,丙的平均成绩 $=(7\times5+8\times5+9\times5+10\times5)\div20=8.5$,$s_{甲}^2=[4\times(7-8.5)^2+6\times(8-8.5)^2+6\times(9-8.5)^2+4\times(10-8.5)^2]\div20=1.05$,$s_{乙}^2=[4\times(8-8.5)^2+6\times(7-8.5)^2+6\times(10-8.5)^2+4\times(9-8.5)^2]\div20=1.45$,$s_{丙}^2=[5\times(7-8.5)^2+5\times(8-8.5)^2+5\times(9-8.5)^2+5\times(10-8.5)^2]\div20=1.25$,∵ $s_{甲}^2<s_{丙}^2<s_{乙}^2$,∴ 甲的成绩最稳定。故选A。

3 甲 【解析】从题图中可看出甲的成绩波动较小,则甲的成绩稳定。故答案为:甲。

4 a^2s^2 【解析】∵ 一组数据 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ 的方差是 s^2,∴ 一组新数据 $ax_1+1,ax_2+1,ax_3+1,\cdots,ax_n+1$ 的方差是 a^2s^2。故答案为:a^2s^2。

5 解:(1)

种植技术	优等品数量/个	平均数	方差
A	16	4.990	0.103
B	10	4.975	0.093

(2)从优等品数量的角度看,因A技术种植的西瓜优等品数量较多,所以A技术较好;从平均数的角度看,因A技术种植的西瓜质量的平均数更接近5 kg,所以A技术较好;从方差的角度看,因B技术种植的西瓜质量的方差更小,所以B技术种植的西瓜质量更为稳定;从市场销售角度看,因优等品更畅销,A技术种植的西瓜优等品数量更多,且平均质量更接近5 kg,因而更适合推广A技术。

6 解:(1)依题意,得甲的平均成绩

$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{6}\times(10\times2+8\times2+9\times2)=9$(环),

乙的平均成绩

$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{6}\times(10\times3+9\times1+8\times1+7\times1)=9$(环)。

(2)$s_{甲}^2=\frac{1}{6}\times[2\times(10-9)^2+2\times(8-9)^2+2\times(9-9)^2]=\frac{2}{3}$,

$s_{乙}^2=\frac{1}{6}\times[3\times(10-9)^2+(7-9)^2+(8-9)^2+(9-9)^2]=\frac{4}{3}$。

(3)推荐甲参加全国比赛更合适。理由如下:两人的平均成绩相等,说明实力相当。但甲的六次测试成绩的方差比乙小,说明甲发挥较为稳定,故推荐甲参加全国比赛更合适。

20.3 课题学习 体质健康测试中的数据分析

变式题型

1 C 【解析】因为这10名同学家庭一个月节约用水的平均数 $=\frac{1}{10}\times(0.5\times2+1\times3+1.5\times4+2\times1)=1.2$,所以估计这180名同学家庭一个月节约用水的总量 $=180\times1.2=216$(t),故选C。

2 解:(1)甲组数据的平均数是14,中位数是14,众数是14;乙组数据的平均数13.5,中位数是5,众数是5。

(2)对于甲群游客,平均数、众数、中位数都能反映这群游客的年龄特征;对于乙群游客,只有中位数和众数能反映这群游客的年龄特征。

3 解:(1)对于甲队:

平均数为$\frac{13\times2+14\times1+15\times4+16\times1+17\times2}{2+1+4+1+2}=\frac{150}{10}=15$,方差为$\frac{1}{10}[2\times(15-13)^2+1\times(15-14)^2+4\times(15-15)^2+1\times(15-16)^2+2\times(15-17)^2]=\frac{18}{10}=1.8$;对于乙队:年龄为6的最多,故众数为6;题中已将年龄从小到大排列,第5,6个游客的年龄分别为5,6,其平均数为5.5,故中位数是5.5。填写表格如下:

	平均数	中位数	众数	方差
甲队游客的年龄	15	15	15	1.8
乙队游客的年龄	15	5.5	6	411.4

(2)①平均数或中位数或众数

②平均数不能较好地反映乙队游客的年龄特征。因为乙队游客年龄中含有两个极端值,受两个极端值的影响,导致乙队游客年龄的方差较大,平均数高于大部分成员的年龄,所以平均数不能较好地反映乙队游客的年龄特征。

拔高题训练 正文 P208

1 C 【解析】若前x年的年平均产量增加越快,则总产量增加就越快,根据图像可得出第7年总产量增加最快,故前7年的年平均产量最高,$x=7$。故选C。

2 D 【解析】原数据:3,4,5,4的平均数为$\frac{3+4+5+4}{4}=4$,中位数为4,众数为4,方差为$\frac{1}{4}\times[(3-4)^2+(4-4)^2\times2+(5-4)^2]=0.5$;新数据:3,4,4,4,5的平均数为$\frac{3+4+4+4+5}{5}=4$,中位数为4,众数为4,方差为$\frac{1}{5}\times[(3-4)^2+(4-4)^2\times3+(5-4)^2]=0.4$。故选D。

3 平均数 中位数 众数 【解析】(1)甲厂的抽检产品中,平均数为$(4+6+6+6+8+9+12+13)\div8=8$,所以他们选择了平均数8作为他们广告的依据;乙厂的抽检产品中,中位数是$(7+9)\div2=8$,所以他们选择了中位数8作为他们广告的依据;丙厂的抽检产品中,8出现的次数最多,故众数为8,所以他们选择了众数8作为他们广告的依据。故答案为:平均数;中位数;众数。

4 众数 【解析】根据题意,在这个问题中我们最值得关注的是队伍的整齐程度,故应该关注该校所有女生身高的众数。故答案为:众数。

5 解:选择甲运动员。理由如下:

甲的平均数为$\frac{9+6+6+8+7+6+6+8+8+6}{10}=7$,

乙的平均数为$\frac{4+5+7+6+8+7+8+8+8+9}{10}=7$,

$s_{甲}^2=\frac{[(9-7)^2+(6-7)^2+\cdots+(6-7)^2]}{10}=1.2$,

$s_{乙}^2=\frac{[(4-7)^2+(5-7)^2+\cdots+(9-7)^2]}{10}=2.2$,

$\because s_{甲}^2<s_{乙}^2$,$\therefore$ 甲的成绩比较稳定,$\therefore$ 应选择甲运动员参加比赛。

6 解:(1)3 400 3 000

(2)本题答案不唯一。例如,用中位数反映该公司全体员工月收入水平较为合适。理由:在这组数据中有差异较大的数据,这会导致平均数较大。该公司员工月收入的中位数是3 400元,这说明除去月收入为3 400元的员工,一半员工的月收入高于3 400元,另一半员工的月收入低于3 400元。因此,用中位数可以更好地反映该公司全体员工月收入水平。