答案与点拨

专题一　数列

第一节　数列的概念与通项公式

学业测评

1. B　【点拨】容易观察出，从第二项开始，每一项都是前一项的2倍，即 $a_1=1, a_2=2^1, a_3=2^2, a_4=2^3, a_5=2^4, a_6=2^5, \cdots$，易得 $a_n=2^{n-1}$. 故选B项.

【提示】通过观察，找出项与序号之间的联系，进而找出规律，得出通项公式.

2. C　【点拨】易知数列的通项公式为 $a_n=\frac{n}{n+1}$，把0.96化为通项的形式：$0.96=\frac{96}{100}=\frac{24}{25}=\frac{n}{n+1}$，故 $n=24$，∴ 应选C项.

3. C　【点拨】对于(3)，将 $n=3$ 代入，$a_3=3\neq1$，易知(3)不是通项公式. 通过观察、猜想、确认的办法，根据半角公式可知(2)和(4)实质是一样的. 数列1,0,1,0,…的通项公式可猜想为 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^{n+1}$，这就是(1)的形式. 另外我们可以联想到单位圆与 x、y 轴的交点的横坐标依次为1,0,−1,0，根据三角函数的定义，可以猜想通项公式为 $\sin\frac{n\pi}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$，这样1,0,1,0,…的通项公式可猜想为 $a_n=\sin^2\frac{n\pi}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$. 对于(5)，易看出它不是数列 $\{a_n\}$ 的一个通项公式. 综上，可知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式有三个，即有三种表示形式. ∴ 应选C项.

【提示】根据数列 $\{a_n\}$ 的前几项，求其通项公式，一般不唯一，我们常常取简便的一个. 求通项公式，一般都是通过观察数列中诸项的特点，进行归纳、类比，然后作出猜想，并加以必要的证明，这是探究真理的一般思维过程.

4. $4n+2$　【点拨】第1个有白色地面砖6块，第2个有10块，第3个有14块，……，后一个总比前一个多4块，从而第 n 个有 $(4n+2)$ 块.

5. 令 $2n^2-n=45$，得 $2n^2-n-45=0$，得 $n=5$，或 $n=-\frac{9}{2}$（舍），故45是此数列中的第5项.

令 $2n^2-n=3$，得 $2n^2-n-3=0$，此方程不存在正整数解，故3不是此数列中的项.

6. (1)递增数列，因为从第2项起，每一项都大于它的前一项；

(2)递减数列，因为从第2项起，每一项都小于它的前一项；

(3)摆动数列，因为从第2项起，数列中有些项大于它的前一项，而有些项小于它的前一项；

(4)常数列.

高考测评

1. C　【点拨】∵ 数列 $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$，∴ $a_k=1+\frac{1}{k}$.

2. C　【点拨】∵ $a_n=n^2+n=n(n+1)$，而 $702=26\times27$. 故选C项.

3. D　【点拨】由数列中的项可观察规律，$5-3=10-8=17-(a+b)=(a-b)-24=2$，$\begin{cases}a+b=15,\\a-b=26,\end{cases}$ 解得 $a=\frac{41}{2}, b=-\frac{11}{2}$，故选D项.

4. C　【点拨】$a_n=\frac{n}{n^2+156}=\frac{1}{n+\frac{156}{n}}$.

5. D　【点拨】结合二次函数 $f(x)=x^2+\lambda x$，可知其开口向上，对称轴是 $x=-\frac{\lambda}{2}$，∴ 要使 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上递增，只需 $-\frac{\lambda}{2}\leqslant1$，但由于 $a_n=n^2+\lambda n$ 中 $n\in\mathbf{N}^*$，故只需 $-\frac{\lambda}{2}<\frac{3}{2}$，∴ $\lambda>-3$.

6. A　【点拨】设 $\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}=t\left(t=1,\frac{2}{5},\frac{4}{25},\cdots\right)$，则 $a_n=5t^2-4t=5\left(t^2-\frac{4}{5}t\right)=5\left(t-\right.$

$\left.\frac{2}{5}\right)^2-\frac{4}{5}$,由二次函数的图象可知,当 $t=\frac{2}{5}$ 时,即 $n=2$ 时 a_n 取得最小值;当 $t=1$ 时,即 $n=1$ 时 a_n 取得最大值,所以 $p+q=3$.

◆ 7. $4n+8$ 【点拨】第(1)、(2)、(3)…个图案中黑色瓷砖数依次为:$15-3=12$;$24-8=16$;$35-15=20$;…由此可猜测第(n)个图案中黑色瓷砖数为:$12+(n-1)\times4=4n+8$.

◆ 8. 4 【点拨】由题意得

$$\begin{cases}k(k+4)\left(\frac{2}{3}\right)^k>(k-1)(k-1+4)\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1},\\ k(k+4)\left(\frac{2}{3}\right)^k>(k+1)(k+1+4)\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1},\end{cases}$$

化简得 $\begin{cases}(k-1)^2<10,\\ k^2>10,\end{cases}$ 又因为 $k\in\mathbf{N}^*$,

所以 $k=4$.

◆ 9. (1)令 $n(n+2)=80$,得 $n_1=8$,$n_2=-10$(舍去),$\therefore$ 80 是数列的第 8 项. 令 $n(n+2)=90$,此方程无正整数解,$\therefore$ 90 不是该数列中的项.

(2)$\because a_{99}=99\times101<10\ 000$,而 $a_{100}=100\times102>10\ 000$,$\therefore$ 从第100 项开始,该数列的项大于 10 000.

◆ 10. (1)由 a_n 为负数,可得 $n^2-5n+4<0$,解得 $1<n<4$. $\because n\in\mathbf{N}^*$,$\therefore n=2,3$. 故数列中有两项为负数.

(2)$\because a_n=n^2-5n+4=\left(n-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$,可知对称轴方程为 $n=\frac{5}{2}$. 又$\because n\in\mathbf{N}^*$,故 $n=2$ 或 3 时,a_n 有最小值,其最小值为 $2^2-5\times2+4=-2$.

◆ 11. 不能把 $\frac{m^2}{m^2+1}$ 看成通项公式,数列的一个通项公式应是数列的第 n 项 a_n 与项数 n 之间的一个函数关系式,即 $a_n=f(n)$.

(1)由观察知,尽管数列的通项公式不是 $\frac{m^2}{m^2+1}$,但是与这种形式应较接近. 又因为前 n 项分子依次为 4,9,16,25,…,与项数 n 的关系为 $(n+1)^2$;而每一项的分母恰好比分子大 1,所以通项公式的分母为 $(n+1)^2+1$.

所以数列的一个通项公式为 $a_n=\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1}(n=1,2,\cdots,m-1)$.

(2)$\because$ 数列的通项公式为 $a_n=\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1}$,

$\therefore$ 设 0.98 是这个数列的第 n 项,

即 $\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1}=0.98$,解得 $n=6\in\mathbf{N}^*$,

$\therefore$ 0.98 是数列中的第6 项.

第二节　数列的递推关系

学业测评

◆ 1. B 【点拨】对 n 依次取 2,3,4,5 得 $a_2=\frac{2}{3}$,$a_3=-\frac{4}{3}$,$a_4=-\frac{8}{3}$,$a_5=\frac{16}{3}$.

◆ 2. C 【点拨】$n=1$ 时,$a_2=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2\times1}=1$;$n=2$ 时,$a_3=\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{2\times2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

【提示】已知数列的递推公式,求数列的项,只要对 n 依次取值即可.

◆ 3. B 【点拨】结合数列的前几项对选项进行验证,或者是观察数列的变化规律:$a_2=a_1+2$,$a_3=a_2+3$,$a_4=a_3+4$,$a_5=a_4+5$,…,由此归纳得出 $a_n=a_{n-1}+n$,$n\in\mathbf{N}^*$,$n\geqslant2$.

【提示】求数列的递推公式,只要把数列的项与项之间的规律找出即可,本题采用验证法更简单.

◆ 4. 0 【点拨】借助递推公式 $a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n$ 可以得到 $a_6=3a_5-a_4$,求出所求的式子的值为 0;也可以依次对 n 取值求出 a_3,a_4,a_5,a_6,再求出所求的式子的值.

◆ 5. $\frac{1}{2}$ 【点拨】对 n 依次取 2,3,4,5,…可求得 $a_2=-1$,$a_3=2$,$a_4=\frac{1}{2}$,$a_5=-1$,…,即数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为周期的周期数列.

◆ 6. (1)当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=(-1)^{n-1}\cdot n-(-1)^{n-2}\cdot(n-1)=(-1)^{n-1}\cdot(2n-1)$. 当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=(-1)^0\times1=1$,也适合. $\therefore a_n=(-1)^{n-1}\cdot(2n-1)(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)$a_1=S_1=2+3=5$,$a_n=S_n-S_{n-1}=2+3^n-(2+3^{n-1})=2\cdot3^{n-1}(n\geqslant2)$.

故 $a_n=\begin{cases}5(n=1),\\ 2\cdot3^{n-1}(n\geqslant2),\end{cases}$ 且 $a_5=2\times3^4=162$.

高考测评

1. B 【点拨】$\because a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,

$\therefore S_5=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

2. C 【点拨】由 $S_n+S_{n+1}=a_{n+1}$ 得 $S_{n-1}+S_n=a_n(n\geqslant2)$,两式相减得:$a_n+a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$,解得$a_n=0(n\geqslant2)$.

当 $n=1$ 时,由 $S_1+S_2=a_2$ 得 $a_1+a_1+a_2=a_2$,$\therefore a_1=0$,从而当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,$a_n=0$,$\therefore\{a_n\}$是常数列.

3. A 【点拨】由 $x_1=1,x_2=3$ 及 $x_{n+2}=x_{n+1}-x_n$,得 $x_3=x_2-x_1=2,x_4=x_3-x_2=-1$,$x_5=x_4-x_3=-3,x_6=x_5-x_4=-2,x_7=x_6-x_5=1,x_8=x_7-x_6=3,\cdots$,可以发现:数列$\{x_n\}$是以 6 为周期的周期数列,且 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=0$,由于 100 被 6 除余 4,因此 $x_{100}=x_4=-1$,$S_{100}=S_4=5$.

4. 1 【点拨】$x_1=f(x_0)=f(5)=2,x_2=f(x_1)=f(2)=1,x_3=f(x_2)=f(1)=4,x_4=f(x_3)=f(4)=5=x_0$,从而数列$\{x_n\}$是周期为 4 的周期数列,于是 $x_{2\,010}=x_{502\times4+2}=x_2=1$.

5. 当 $n\geqslant2$ 时,由已知$\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2^2}a_2+\cdots+\frac{1}{2^n}a_n=2n+5$, ①

得$\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2^2}a_2+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}a_{n-1}=2n+3$. ②

$\therefore$ ①－②得 $a_n=2^{n+1}(n\geqslant2)$.

又 $n=1$ 时,$a_1=14$,$\therefore a_n=\begin{cases}14\ (n=1),\\2^{n+1}(n\geqslant2).\end{cases}$

6. 设上 n 级楼梯共有 a_n 种不同的上法,当第一步上一级时,则余下 $n-1$ 级楼梯,有 a_{n-1} 种不同的上法;当第一步上两级时,则余下 $n-2$ 级楼梯,共有 a_{n-2} 种不同的上法,$\therefore a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$.

显然 $a_1=1,a_2=2$,$\therefore a_3=3,a_4=5,a_5=8,a_6=13,a_7=21,a_8=34,a_9=55,a_{10}=89,a_{11}=144$.

故共有 144 种不同的上法.

7. 由题意可得 $A_n+B_n=1\,000$,

$A_n=0.8A_{n-1}+0.3B_{n-1}$,

$B_n=0.2A_{n-1}+0.7B_{n-1}$.

又 $A_{n-1}+B_{n-1}=1\,000$,故得 $A_n=0.8A_{n-1}+0.3(1\,000-A_{n-1})=0.5A_{n-1}+300$,

同理可得,$B_n=0.5B_{n-1}+200$.

8. 把 $a_{n+1}=2a_n+1$ 变形为 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$,由此可得下面的$(n-1)$个式子:

$a_n+1=2(a_{n-1}+1)$,

$a_{n-1}+1=2(a_{n-2}+1)$,

$a_{n-2}+1=2(a_{n-3}+1)$,

…

$a_2+1=2(a_1+1)$.

将这$(n-1)$个等式相乘,得

$a_n+1=2^{n-1}(a_1+1)$.

又$\because a_1=3$,$\therefore a_n=2^{n+1}-1$.

9. 由$\begin{cases}a_{n+1}=8a_n-6b_n,\\b_{n+1}=6a_n-4b_n\end{cases}$可得

$a_{n+1}-b_{n+1}=2(a_n-b_n)$.

在上式中,令 $n=1,2,3,\cdots,n-2,n-1$ 可得

$a_2-b_2=2(a_1-b_1)$,

$a_3-b_3=2(a_2-b_2)$,

$a_4-b_4=2(a_3-b_3)$,

…

$a_{n-1}-b_{n-1}=2(a_{n-2}-b_{n-2})$,

$a_n-b_n=2(a_{n-1}-b_{n-1})$,

把上面的这$(n-1)$个式子相乘,可得

$a_n-b_n=2^{n-1}(a_1-b_1)$. ①

由已知 $a_1=1,b_1=-1$,可得

$a_1-b_1=2$. ②

由①、②,可得

$a_n-b_n=2^n$. ③

把③代入 $a_{n+1}=8a_n-6b_n$,可得

$a_{n+1}=2a_n+6(a_n-b_n)=2a_n+6\times2^n$.

所以 $a_n=2a_{n-1}+6\times2^{n-1}$.

由上式可得

$a_n=2a_{n-1}+6\times2^{n-1}\Rightarrow2a_n=2^2a_{n-1}+6\times2^n$,

$a_{n-1}=2a_{n-2}+6\times2^{n-2}\Rightarrow2^2a_{n-1}=2^3a_{n-2}+6\times2^n$,

…

$a_3=2a_2+6\times2^2\Rightarrow2^{n-2}a_3=2^{n-1}a_2+6\times2^n$,

$a_2=2a_1+6\times2^1\Rightarrow2^{n-1}a_2=2^na_1+6\times2^n$.

把这$(n-1)$个式子相加并把 $a_1=1$ 代入,可得

$2a_n=2^n+6(n-1)\times2^n$,

所以 $a_n=2^{n-1}(6n-5)$. ④

把④代入③,得 $b_n=2^{n-1}(6n-7)$.

专题二　等差数列

第一节　等差数列

学业测评

1. D 【点拨】仅 D 项是等差数列的定义.

2. D 【点拨】由题意得$\begin{cases}a_1+d=-5,\\a_1+5d=a_1+3d+6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=-8,\\d=3,\end{cases}$故应选 D 项.

3. D 【点拨】从第 10 项开始为正数,说明:$\begin{cases}a_9\leqslant 0,\\a_{10}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-24+(9-1)d\leqslant 0,\\-24+(10-1)d>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d\leqslant 3,\\d>\frac{8}{3}\end{cases}\Rightarrow\frac{8}{3}<d\leqslant 3$,故应选 D 项.

4. B 【点拨】$|a_n|=|70+(n-1)(-9)|=|79-9n|=9\left|8\frac{7}{9}-n\right|$,∴ 当 $n=9$ 时,$|a_n|$最小.

5. D 【点拨】∵ $a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{97}=50$,且 $d=-2$,∴ $a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{99}=(a_1+2d)+(a_4+2d)+(a_7+2d)+\cdots+(a_{97}+2d)=(a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{97})+2d\times 33=50-132=-82$.
∴ 应选 D 项.

6. a 【点拨】$a+b$ 与 $a-b$ 的等差中项为$\frac{1}{2}[(a+b)+(a-b)]=a$.

7. $12-n$ 【点拨】$a_4=8$,$a_8=4$,列出关于 a_1 和 d 的方程组即可解得 a_1 和 d.

∵ $\begin{cases}a_1+3d=8,\\a_1+7d=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=11,\\d=-1.\end{cases}$

∴ $a_n=a_1+(n-1)d=11-(n-1)=12-n$.

8. $\frac{5}{4}$ 【点拨】设两个等差数列的公差分别为 d_1、d_2,即求$\frac{d_1}{d_2}$,由已知得$\begin{cases}y=x+4d_1,\\y=x+5d_2,\end{cases}$即$\begin{cases}4d_1=y-x,\\5d_2=y-x.\end{cases}$解得$\frac{d_1}{d_2}=\frac{5}{4}$,即$\frac{a_2-a_1}{b_4-b_3}=\frac{5}{4}$.

【提示】设两个公差,列方程组求解.

高考测评

1. B 【点拨】设首项为 a_1,则 $a_1a_8-a_4a_5=a_1(a_1+7d)-(a_1+3d)(a_1+4d)=-12d^2<0$,∴ $a_1a_8<a_4a_5$. 又易知 $a_1+a_8=a_4+a_5$,故选 B.

2. C 【点拨】$a_1+a_2=S_3-a_3=2$,即 $2a_1+d=2$ ①,又有 $a_3=a_1+2d=4$ ②,②×2－①得 $d=2$.

3. B 【点拨】设前三项分别为 a_2-d,a_2,a_2+d,则$\begin{cases}(a_2-d)+a_2+(a_2+d)=12,\\a_2(a_2-d)(a_2+d)=48,\end{cases}$解得 $a_2=4,d=2$(舍去 -2),从而 $a_1=2$.

4. D 【点拨】设等差数列$\{a_n\}$的首项为 a_1,公差为 d,依题意得$\begin{cases}a_1+d=2,\\a_1+2d=4,\end{cases}$由此解得$\begin{cases}a_1=0,\\d=2.\end{cases}$ $a_{10}=a_1+9d=18$,选 D 项.

5. D 【点拨】依题意得 $S_{k+2}-S_k=a_{k+1}+a_{k+2}=2a_1+(2k+1)d=2+2(2k+1)=24$,解得 $k=5$,故选D 项.

6. B 【点拨】因为$\{b_n\}$是等差数列,且 $b_3=-2$,$b_{10}=12$,故公差 $d=\frac{12-(-2)}{10-3}=2$. 于是 $b_1=-6$,且 $b_n=2n-8(n\in\mathbf{N}^*)$,即 $a_{n+1}-a_n=2n-8$,所以 $a_8=a_7+6=a_6+4+6=a_5+2+4+6=\cdots=a_1+(-6)+(-4)+(-2)+0+2+4+6=3$.

7. 74 【点拨】依题意得 $a_2+a_4+a_6+a_8=(a_2+a_8)+(a_4+a_6)=2(a_3+a_7)=74$.

8. -1 【点拨】根据已知条件,得 $a_3+a_4+a_5+a_6=0$,而由等差数列性质得,$a_3+a_6=a_4+a_5$,所以,$a_4+a_5=0$,又 $a_4=1$,所以 $a_5=-1$.

9. 设这三个数分别为 $3-d,3,3+d$,由$(3-d)^2+3^2+(3+d)^2=35$,解得 $d=\pm 2$. ∴ 所求三数为 1,3,5 或 5,3,1.

10. 设 $f(x)=a(x+2)^2-1$,∴ $f(0)=4a-1=3$. ∴ $a=1$. ∴ $f(x)=x^2+4x+3$,∴ $f(a_n)=a_n^2+4a_n+3$. ∴ $a_n^2+4a_n+3=9n^2-1$,解得 $a_n=-2\pm 3n$. 故$\{a_n\}$为等差数列.

11. (1)甲虫的爬行距离是首项为 9.8,公差为 9.8 的等差数列,$a_n=9.8+(n-1)\times 9.8=9.8n$.

(2)$a_{60}=9.8\times 60=588$(cm),由 $9.8n=49$ 得 $n=5$(s).

即甲虫 1 min 能爬 588 cm,它爬行 49 cm 需

要 5 s.

12. 根据已知条件 $a_{n+1}^2=a_n^2+4$，

得 $a_{n+1}^2-a_n^2=4$.

$\therefore$ 数列$\{a_n^2\}$是公差为 4 的等差数列，$a_n^2=a_1^2+(n-1)\cdot4=4n-3$.

$\because a_n>0$，$\therefore a_n=\sqrt{4n-3}$.

13. (1)可观察出 $x_1=x_2=1$ 为方程 $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0$ 的两相等实根，

$\therefore \dfrac{c(a-b)}{a(b-c)}=1$，即 $c(a-b)=a(b-c)$.

整理得 $2ac=ab+bc$，即$\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}$，

$\therefore \dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{c}$成等差数列.

(2)$\because (z-x)^2-4(x-y)(y-z)=[(x-y)+(y-z)]^2-4(x-y)(y-z)=[(x-y)-(y-z)]^2=0$，

$\therefore (x-y)-(y-z)=0$，即 $2y=x+z$，即 x,y,z 成等差数列.

(3)反证法：假设 a,b,c 成等差数列，则有 $2b=a+c$.

又$\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{c}$成等差数列，

则$\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}$，即 $b=\dfrac{2ac}{a+c}$. ①

将①代入 $2b=a+c$，得$\dfrac{2ac}{a+c}-\dfrac{a+c}{2}=0$，故 $a=c$.

则有 $a=b=c$，这与已知矛盾，故 a,b,c 不可能成等差数列.

14. $\because a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}$，$\therefore \dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+2}{2a_n}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{2}$，即$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore$ 数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是公差为$\dfrac{1}{2}$的等差数列.

又$\because a_1=2$，$\therefore \dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_1}+(n-1)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}(n-1)=\dfrac{n}{2}$.

故 $a_n=\dfrac{2}{n}$.

15. 将 $x=\dfrac{x}{a(x+2)}$化为 $ax(x+2)=x$，

整理得 $ax^2+(2a-1)x=0$.

$x=f(x)$有唯一解$\Leftrightarrow\Delta=(2a-1)^2=0\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$，$\therefore f(x)=\dfrac{2x}{x+2}$.

又$\because x_{n+1}=f(x_n)=\dfrac{2x_n}{x_n+2}$，$\therefore \dfrac{1}{x_{n+1}}=\dfrac{1}{x_n}+\dfrac{1}{2}$，

即$\dfrac{1}{x_{n+1}}-\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{1}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

$\therefore$ 数列$\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$是公差为$\dfrac{1}{2}$的等差数列.

$\therefore \dfrac{1}{x_n}=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{n-1}{2}=\dfrac{2+(n-1)x_1}{2x_1}$，

$\therefore x_n=\dfrac{2x_1}{(n-1)x_1+2}$.

又$\because f(x_1)=\dfrac{1}{1\,003}$，

$\therefore \dfrac{2x_1}{x_1+2}=\dfrac{1}{1\,003}$，解得 $x_1=\dfrac{2}{2\,005}$.

$\therefore x_n=\dfrac{2\times\dfrac{2}{2\,005}}{(n-1)\times\dfrac{2}{2\,005}+2}=\dfrac{2}{n+2\,004}$，

则 $x_{2\,012}=\dfrac{2}{2\,012+2\,004}=\dfrac{1}{2\,008}$.

16. 第一位朋友每天晚上在主人家；

第二位朋友以后在主人家的天数为：2，4，6，8，…，这些数构成以 2 为首项，公差为 2 的等差数列，通项公式为：$a_n=2n$；

第三位朋友以后在主人家的天数为：3，6，9，…，这些数构成以 3 为首项，公差为 3 的等差数列，通项公式为：$a_n=3n$；

第四、五、六、七位朋友晚上在主人家的天数分别构成以 4，5，6，7 为首项，公差为 4，5，6，7 的等差数列，通项公式分别为：$a_n=4n$，$a_n=5n$，$a_n=6n$，$a_n=7n$.

他们要在同一晚上出现，这个数应为这七个数列的公共项，这一项是 2，3，4，5，6，7 的倍数，而 2，3，4，5，6，7 的最小公倍数为 420，因此第 420，840，1 260，…天晚上他们会同时在主人家出现.

第二节　等差数列的前 n 项和

学业测评

1. D 【点拨】$S_4=2+6d=20$，得 $d=3$，$S_6=3+15d=48$.

2. C 【点拨】$S_8=\dfrac{8(a_1+a_8)}{2}=\dfrac{8(a_2+a_7)}{2}=$

64.

◆ 3. B 【点拨】由 $a_1+a_9=a_4+a_6=a_7+a_3$ 得 $3(a_1+a_9)=15+3$，∴ $a_1+a_9=6$，$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=\frac{9}{2}\times 6=27$.

◆ 4. A 【点拨】因 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都是等差数列，那么 $\{a_n+b_n\}$ 也是等差数列，它的前 100 项和 $T_{100}=\frac{100}{2}[(a_1+b_1)+(a_{100}+b_{100})]=\frac{100}{2}\times(5+15+100)=\frac{100}{2}\times 120=6\,000$.

◆ 5. B 【点拨】由 $a_3+a_5=2a_4$ 知 $a_4=7$. 又 $a_1=1$，则 $a_1+3d=a_4=7$，得 $d=2$，由 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=n+n(n-1)=n^2=100$ 得 $n=10$.

◆ 6. 9 【点拨】$\frac{S_9}{S_5}=\frac{\frac{1}{2}(a_1+a_9)\times 9}{\frac{1}{2}(a_1+a_5)\times 5}=\frac{9\times 2a_5}{5\times 2a_3}=9$.

◆ 7. -1 【点拨】$a_n-a_{n-1}=4n-\frac{5}{2}-\left[4(n-1)-\frac{5}{2}\right]=4$，即 $\{a_n\}$ 是 $d=4$ 的等差数列. 又 $a_1=4-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$，所以 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{3}{2}n+2n(n-1)=2n^2-\frac{1}{2}n$.

依 $2n^2-\frac{1}{2}n=an^2+bn$ 得 $a=2,b=-\frac{1}{2}$，所以 $ab=-1$.

◆ 8. $\{a_n\}$ 是等差数列. 证明如下：

因为 $S_n=n^2-5n$，所以当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=-4$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-5n)-(n-1)^2+5(n-1)=2n-6$.

而当 $n=1$ 时，$2n-6=-4$，所以 $a_n=2n-6$.

所以 $a_{n+1}-a_n=2$（常数），所以 $\{a_n\}$ 是等差数列.

◆ 9. 前 12 项中奇数项、偶数项分别构成以 a_1、a_2 为首项，$2d$ 为公差的新的等差数列.

解法一：∵ $S_{奇}=6a_1+\frac{6\times 5}{2}\times 2d=6a_1+30d$，

$S_{偶}=6(a_1+d)+\frac{6\times 5}{2}\times 2d=6a_1+36d$，

∴ $\begin{cases}\frac{6a_1+30d}{6a_1+36d}=\frac{27}{32},\\(6a_1+30d)+(6a_1+36d)=354,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}d=5.\\a_1=2.\end{cases}$

解法二：$S_{偶}-S_{奇}=(a_2+a_4+\cdots+a_{12})-(a_1+a_3+\cdots+a_{11})=(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{12}-a_{11})=6d$.

∵ $\begin{cases}\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{27}{32},\\S_{奇}+S_{偶}=354,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}S_{偶}=192,\\S_{奇}=162.\end{cases}$

∴ $S_{偶}-S_{奇}=192-162=6d$，∴ $d=5$.

◆ 10. ∵ $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=a_4+a_{n-3}$，∴ $a_1+a_n=\frac{21+67}{4}=22$，$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=11n=286$，∴ $n=26$.

高考测评

◆ 1. B 【点拨】由 $S_{10}=S_{11}$，得 $a_{11}=S_{11}-S_{10}=0$，$a_1=a_{11}+(1-11)d=0+(-10)\times(-2)=20$.

◆ 2. A 【点拨】$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=-1+4-7+10+\cdots+(-1)^{10}\cdot(3\times 10-2)=(-1+4)+(-7+10)+\cdots+[(-1)^9\cdot(3\times 9-2)+(-1)^{10}\cdot(3\times 10-2)]=3\times 5=15$.

◆ 3. B 【点拨】∵ $d<0$，∴ $\{a_n\}$ 递减. 又 $|a_3|=|a_9|$，∴ $a_3>0,a_9<0$，即 $a_3=-a_9$，即 $a_3+a_9=2a_6=0$. ∴ $a_6=0$，故前 5 项或前 6 项和最大.

◆ 4. C 【点拨】∵ $a_n=2n-7$，∴ $a_1=-5,a_2=-3,a_3=-1,a_4=1,a_5=3,\cdots,a_{15}=23$，∴ $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{15}|=(5+3+1)+(1+3+5+\cdots+23)=9+\frac{12\times(1+23)}{2}=153$.

◆ 5. C 【点拨】∵ $S_3=S_{11}$，∴ S_n 的图象的对称轴为 $n=7$. 故当 $n=7$ 时，S_n 取得最大值.

◆ 6. 25 【点拨】设数列的公差为 d，则 $3d=a_4-a_1=6$，得 $d=2$，所以 $S_5=5\times 1+\frac{5\times 4}{2}\times 2=25$.

◆ 7. 110 【点拨】设 $\{a_n\}$ 的首项、公差分别是 a_1,d，则 $\begin{cases}a_1+2d=16,\\20a_1+\frac{20\times(20-1)}{2}d=20,\end{cases}$ 解得 $a_1=20,d=-2$，∴ $S_{10}=10\times 20+\frac{10\times 9}{2}\times(-2)=$

110.

8. 2 000 【点拨】当放在最左侧坑时，路程和为 $2\times(0+10+20+\cdots+190)$ 米；当放在左侧第 2 个坑时，路程和为 $2\times(10+0+10+20+\cdots+180)$ 米（减少了 360 米）；当放在左侧第 3 个坑时，路程和为 $2\times(20+10+0+10+20+\cdots+170)$ 米（减少了 320 米）；依次进行，显然当放在中间的第 10 或 11 个坑时，路程和最小，为 $2\times(90+80+\cdots+0+10+20+\cdots+100)=2\ 000$ 米.

9. 由于 $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，因此有 $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

10. 由题意 $a_1=5\ 000$ m，$d=500$ m，$n=7$，则 $S_7=7\times5\ 000+\frac{7\times6}{2}\times500=45\ 500$(m)，即该同学 7 天一共将跑 45 500 m.

11. (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $a_n=a_1+(n-1)d$.

由 $a_1=1$，$a_3=-3$ 可得 $1+2d=-3$.

解得 $d=-2$.

从而，$a_n=1+(n-1)\times(-2)=3-2n$.

(2) 由 (1) 可知 $a_n=3-2n$.

所以 $S_n=\frac{n[1+(3-2n)]}{2}=2n-n^2$.

进而由 $S_k=-35$ 可得 $2k-k^2=-35$，

即 $k^2-2k-35=0$，解得 $k=7$ 或 $k=-5$.

又 $k\in\mathbf{N}^*$，故 $k=7$ 为所求结果.

12. 因为从第 1 个到第 $n-1$ 个数集共有正整数 $1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}$ 个，所以第 n 个数集中的最小数是 $\frac{n(n-1)}{2}+1=\frac{n^2-n+2}{2}$，且此数集中的 n 个数组成公差为 1 的等差数列，所以 $S_n=n\cdot\frac{n^2-n+2}{2}+\frac{n(n-1)}{2}\times1=\frac{n(n^2+1)}{2}$.

13. (1) 由已知 $a_6=a_1+5d=23+5d>0$，$a_7=a_1+6d=23+6d<0$，解得 $-\frac{23}{5}<d<-\frac{23}{6}$.

又 $d\in\mathbf{Z}$，$\therefore d=-4$.

(2) $\because d<0$，$\therefore \{a_n\}$ 是递减数列. 又 $a_6>0$，$a_7<0$，$\therefore$ 当 $n=6$ 时，S_n 取得最大值 $S_6=6\times23+\frac{6\times5}{2}\times(-4)=78$.

(3) $S_n=23n+\frac{n(n-1)}{2}(-4)>0$，

整理得 $n(50-4n)>0$.

$\therefore 0<n<\frac{25}{2}$. 又 $n\in\mathbf{N}^*$，$\therefore n$ 的最大值为 12.

14. (1)(Ⅰ) $S_1=S_5=5$，$S_2=S_4=8$，$S_3=9$；(Ⅱ) $S_1=S_7=-14$，$S_3=S_5=-30$.

(2) 对于等差数列 $\{a_n\}$，当 $a_k+a_{k+1}=0$ 时，猜想 $S_n=S_{2k-n}$ $(n\leqslant2k, n,k\in\mathbf{N}^*)$.

证明：设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d. $\because a_k+a_{k+1}=0$，$\therefore a_1+(k-1)d+a_1+kd=0$，$\therefore 2a_1=(1-2k)d$. 又 $S_{2k-n}-S_n=(2k-n)a_1+\frac{(2k-n)(2k-n-1)}{2}d-na_1-\frac{n(n-1)}{2}d=\left[(k-n)(1-2k)+\frac{(2k-n)(2k-n-1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}\right]\cdot d=0$. $\therefore S_{2k-n}=S_n$.

15. (1) 这样计算增资不对.

设根据甲方案第 n 次的增资额为 a_n，则 $a_n=1\ 000n$，第 n 年末的增资总额为 $T_n=500n(n+1)$. 设根据乙方案第 n 次的增资额为 b_n，则 $b_n=300n$，第 n 年末的增资总额为 $S_{2n}=300n(2n+1)$.

由于 $T_1=1\ 000$，$S_2=900$，$T_1>S_2$，因此只工作一年选择甲方案.

又 $T_2=3\ 000$，$S_4=3\ 000$，$T_2=S_4$.

当 $n\geqslant3$ 时，$T_n<S_{2n}$，因此工作两年或两年以上选择乙方案.

(2) 由题意得 $T_n=500n(n+1)$，$S_{2n}=an(2n+1)$.

要使 $S_{2n}>T_n$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立，即 $a>500\cdot\frac{n+1}{2n+1}$.

又可知 $\left\{500\cdot\frac{n+1}{2n+1}\right\}$ 为递减数列，故当 $n=1$ 时 $a_n=500\cdot\frac{n+1}{2n+1}$ 取得最大值.

则 $a>500\times\frac{2}{3}=\frac{1\ 000}{3}$(元)，即当 $a>\frac{1\ 000}{3}$ 时，方案乙总比方案甲多增资.

16. (1) $\because$ 对任意的正整数 n，$2\sqrt{S_n}=a_n+1$ ①恒成立，

$\therefore$ 当 $n=1$ 时，$2\sqrt{a_1}=a_1+1$，即 $(a_1-1)^2=0$，

$\therefore a_1=1$.

当 $n\geqslant 2$ 时，有 $2\sqrt{S_{n-1}}=a_{n-1}+1$. ②

①^2 − ②^2 得 $4a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+2a_n-2a_{n-1}$，

即 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$.

$\because a_n>0$，$\therefore a_n+a_{n-1}>0$，$\therefore a_n-a_{n-1}=2$，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差为 2 的等差数列.

$\therefore a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$.

(2) $\because a_{n+1}=2n+1$，

$\therefore b_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，

$\therefore B_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{n}{2n+1}$.

专题三　等比数列

第一节　等比数列

学业测评

1. A 【点拨】$a_4a_7=a_1a_{10}=-2$.

2. B 【点拨】因为 $b^2=9$，所以 $b=\pm 3$，又因为 b 与 -1，-9 符号相同，所以 $b=-3$，$b^2=ac=9$.

3. C 【点拨】设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则 $2\cdot a_1q^3=a_1q^5-a_1q^4$. 所以 $q^2-q-2=0$，解得 $q=-1$ 或 $q=2$.

4. D 【点拨】由 $a_5=\dfrac{1}{4}=a_2q^3=2\cdot q^3$，解得 $q=\dfrac{1}{2}$.

5. A 【点拨】因为 a,b,c 成等比数列，所以 $b^2=ac$，所以 $\Delta=b^2-4ac=-3b^2<0$，所以 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴无交点.

6. $\pm 2\sqrt{2}$ 【点拨】因为 $2,b,4$ 成等比数列，所以 $b^2=8$，所以 $b=\pm 2\sqrt{2}$.

7. 4 【点拨】设插入的数为 a,b,c，则 $1,a,b,c,16$ 成等比数列，所以 $1\times 16=a\times c=b^2$，又因为 b 和 $1,16$ 的符号相同，所以 $b=4$.

8. 192 【点拨】因为 $\dfrac{a_6\cdot a_7\cdot a_8}{a_3\cdot a_4\cdot a_5}=q^9=8$，所以 $a_9\cdot a_{10}\cdot a_{11}=a_6a_7a_8\cdot q^9=24\times 8=192$.

9. 当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=3a_1+2\Rightarrow a_1=-1$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(3a_n+2)-(3a_{n-1}+2)$，

$\therefore 2a_n=3a_{n-1}\Rightarrow \dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{3}{2}$.

$\therefore \{a_n\}$ 是以 $\dfrac{3}{2}$ 为公比的等比数列，其首项为 $a_1=-1$，

$\therefore a_n=-1\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}=-\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$.

10. (1) $a_5=a_2\cdot q^{5-2}$，得 $q=-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore a_n=a_2q^{n-2}=4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}=-8\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

(2) 依题意有 $6q^{n-1}=768$，$q^{n-1}=128=2^7$，①

$6q^{2n-5}=12\ 288$，$q^{2n-5}=2\ 048=2^{11}$， ②

把①代入②，得 $\dfrac{(2^7)^2}{q^3}=2^{11}$，$q^3=2^3$.

因为 $q\in\mathbf{R}$，所以 $q=2$.

(3) 若用通项公式 $a_n=a_1q^{n-1}$ 来求，其计算量较大，而用 $a_n=a_mq^{n-m}$ 就简单些.

$\because a_8=a_5q^3$，$\therefore q^3=8$. $\therefore q=2$.

$\therefore a_n=a_5q^{n-5}=7\times 2^{n-5}$.

11. (1) 由已知 $a_1=b_1=1$，$a_2=b_2$，$a_8=b_3$，可得 $\begin{cases}1+d=q,\\1+7d=q^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q=6,\\d=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}q=1,\\d=0\end{cases}$（舍去）.

(2) 假设存在 a,b，使得 $a_n=\log_a b_n+b\ (n\in\mathbf{N}^*)$ 恒成立，

即 $1+5(n-1)=\log_a 6^{n-1}+b\Rightarrow 5n-4=(n-1)\log_a 6+b\Rightarrow(5-\log_a 6)n-(4+b-\log_a 6)=0$.

$\because a_n=\log_a b_n+b$ 对一切正整数 n 恒成立，

$\therefore\begin{cases}5-\log_a 6=0,\\4+b-\log_a 6=0\end{cases}\Rightarrow a=\sqrt[5]{6}$，$b=1$.

高考测评

1. D 【点拨】因为 a_7 是 a_3 与 a_9 的等比中项，所以 $a_7^2=a_3a_9$，又因为公差为 -2，所以 $(a_1-12)^2=(a_1-4)(a_1-16)$，解得 $a_1=20$，通项公式为 $a_n=20+(n-1)(-2)=22-2n$，所以 $S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=5(20+2)=110$，故选 D 项.

2. B 【点拨】由 $a_na_{n+1}=16^n$，得 $a_{n+1}\cdot a_{n+2}=16^{n+1}$，两式相除得，$\frac{a_{n+1}\cdot a_{n+2}}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{16^{n+1}}{16^n}=16$，设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，$\therefore q^2=16$，$\because a_na_{n+1}=16^n$，可知公比为正数，$\therefore q=4$.

3. A 【点拨】根据等差、等比数列的性质，可知 $x_1=2,x_2=3,y_1=2,y_2=4$. $\therefore P_1(2,2)$，$P_2(3,4)$. $\therefore S_{\triangle OP_1P_2}=1$.

4. D 【点拨】等比数列 $\{a_n\}$ 是递减数列，可设其首项为 a_1，公比为 q. 若 $a_1>0$，则 $0<q<1$；若 $a_1<0$，则 $q>1$，即 q 必为正值，即 $\{a_n\}$ 中的各项都同号. 又 $T_{10}=16T_6$，$\therefore a_7a_8a_9a_{10}=16$，即 $(a_5\cdot a_{12})^2=16$，$\therefore a_5\cdot a_{12}=4$，故选 D 项.

5. C 【点拨】易知曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是半圆，不妨设点 $(2,0)$ 到曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 上不同的三点的距离分别为 d_1,d_2,d_3，它们构成的等比数列的公比为 $q(q>0)$. 不妨令 $d_3=d_1q^2$，显然 $1\leqslant d_3\leqslant 3$，所以 $\frac{1}{d_1}\leqslant q^2\leqslant\frac{3}{d_1}$，又 $1\leqslant d_1\leqslant 3$，所以 $\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant q\leqslant\sqrt{3}$，$q$ 不能取到 $\frac{1}{2}$，故选 C 项.

6. A 【点拨】①中，$\begin{cases}(a_{99}-1)(a_{100}-1)<0,\\ a_{99}\cdot a_{100}>1,\\ a_1>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_{99}>1,\\ 0<a_{100}<1\end{cases}\Rightarrow q=\frac{a_{100}}{a_{99}}\in(0,1)$，$\therefore$ ①正确. ②中，$\left.\begin{matrix}a_{99}a_{101}=a_{100}^2,\\ 0<a_{100}<1\end{matrix}\right\}\Rightarrow a_{99}\cdot a_{101}<1$，$\therefore$ ②正确. ③中，$\left.\begin{matrix}T_{100}=T_{99}\cdot a_{100},\\ 0<a_{100}<1\end{matrix}\right\}\Rightarrow T_{100}<T_{99}$，$\therefore$ ③错误. ④中，$T_{198}=a_1a_2\cdots a_{198}=(a_1\cdot a_{198})\cdot(a_2\cdot a_{197})\cdot\cdots\cdot(a_{99}\cdot a_{100})=(a_{99}\cdot a_{100})^{99}>1$，$T_{199}=a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_{198}\cdot a_{199}=(a_1a_{199})(a_2a_{198})\cdots(a_{99}a_{101})\cdot a_{100}={a_{100}}^{199}<1$，$\therefore$ ④正确.

7. 2 【点拨】由题意得 $2q^2-2q=4$，解得 $q=2$ 或 $q=-1$. 又 $\{a_n\}$ 单调递增，得 $q>1$，$\therefore q=2$.

8. $\sqrt[3]{3}$ 【点拨】设 $a_2=t$，则 $1\leqslant t\leqslant q\leqslant t+1\leqslant q^2\leqslant t+2\leqslant q^3$，由于 $t\geqslant 1$，所以 $q\geqslant\max\{t,\sqrt{t+1},\sqrt[3]{t+2}\}$，故 q 的最小值是 $\sqrt[3]{3}$.

9. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 【点拨】根据题目条件可知，$c-a=x(b-a)$，$b-c=b-a-(c-a)=(1-x)(b-a)$，最佳乐观系数满足：$c-a$ 是 $b-c$ 和 $b-a$ 的等比中项，所以有 $[x(b-a)]^2=(1-x)(b-a)(b-a)$，又因为 $b-a>0$，所以 $x^2=1-x$，即 $x^2+x-1=0$，解得 $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，又 $0<x<1$，所以 $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

10. -9 【点拨】由题意，数列 $\{b_n\}$ 有连续四项在集合 $\{-53,-23,19,37,82\}$ 中，说明 $\{a_n\}$ 有连续四项在集合 $\{-54,-24,18,36,81\}$ 中，由于 $\{a_n\}$ 中连续四项至少有一项为负，$\therefore q<0$，又 $\because |q|>1$，$\therefore\{a_n\}$ 的连续四项为 $-24,36,-54,81$. $\therefore q=\frac{36}{-24}=-\frac{3}{2}$，$\therefore 6q=-9$.

11. (1) 依题意知 $a_n=a_1+(n-1)d$，$b_n=b_1\cdot q^{n-1}=a_1\cdot d^{n-1}$.

由 $\begin{cases}a_4=b_4,\\ a_{10}=b_{10},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a_1+3d=a_1d^3,\\ a_1+9d=a_1d^9.\end{cases}$

即 $3d=a_1(d^3-1)$，$9d=a_1(d^9-1)$，

以上两式相除并整理得 $d^6+d^3-2=0$.

解得 $d^3=1$，或 $d^3=-2$.

$\because d\neq 1$，$\therefore d^3=-2$，$d=-\sqrt[3]{2}$，代入原方程解得 $a_1=\sqrt[3]{2}$.

故 $a_1=\sqrt[3]{2}$，$d=-\sqrt[3]{2}$.

(2) 由(1)得，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n=(2-n)\sqrt[3]{2}$，$b_n=-(-\sqrt[3]{2})^n$，

故 $b_{16}=-(-\sqrt[3]{2})^{16}=-32\sqrt[3]{2}$，

由 $(2-n)\sqrt[3]{2}=-32\sqrt[3]{2}$，解得 $n=34$.

故 b_{16} 为 $\{a_n\}$ 中的第 34 项.

12. 设这四个数分别为 a,aq,aq^2,aq^3，

则 $\begin{cases}a^4q^6=1, & ①\\ aq(1+q)=-\frac{3}{2}. & ②\end{cases}$

由①得 $a^2q^3=\pm 1$，

由②得 $a^2q^2(1+q)^2=\frac{9}{4}$. ③

把 $a^2q^2=\frac{1}{q}$ 代入③,得 $q^2-\frac{1}{4}q+1=0$,此方程无解.

把 $a^2q^2=-\frac{1}{q}$ 代入③,得 $q^2+\frac{17}{4}q+1=0$,解得 $q=-4$,或 $q=-\frac{1}{4}$.

当 $q=-4$ 时,$a=-\frac{1}{8}$ 或 $a=\frac{1}{8}$(舍);

当 $q=-\frac{1}{4}$ 时,$a=8$ 或 $a=-8$(舍).

$\therefore$ 这四个数分别是 $8,-2,\frac{1}{2},-\frac{1}{8}$ 或 $-\frac{1}{8},\frac{1}{2},-2,8$.

13. 由题意知 $a_1=2$,且 $ba_n-2^n=(b-1)S_n$,$ba_{n+1}-2^{n+1}=(b-1)S_{n+1}$,

两式相减得 $b(a_{n+1}-a_n)-2^n=(b-1)a_{n+1}$,即 $a_{n+1}=ba_n+2^n$. ①

(1)当 $b=2$ 时,由①知 $a_{n+1}=2a_n+2^n$,于是 $a_{n+1}-(n+1)\cdot 2^n=2a_n+2^n-(n+1)\cdot 2^n=2(a_n-n\cdot 2^{n-1})$. 又 $a_1-1\times 2^{1-1}=1\neq 0$,所以 $\{a_n-n\cdot 2^{n-1}\}$ 是首项为 1,公比为 2 的等比数列.

(2)当 $b=2$ 时,由(1)知 $a_n-n\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$,即 $a_n=(n+1)\cdot 2^{n-1}$.

当 $b\neq 2$ 时,由①得 $a_{n+1}-\frac{1}{2-b}\cdot 2^{n+1}=ba_n+2^n-\frac{1}{2-b}\cdot 2^{n+1}=ba_n-\frac{b}{2-b}\cdot 2^n=b\left(a_n-\frac{1}{2-b}\cdot 2^n\right)$,因此 $a_{n+1}-\frac{1}{2-b}\cdot 2^{n+1}=b\left(a_n-\frac{1}{2-b}\cdot 2^n\right)$.

当 $b=1$ 时,由已知易得 $a_n=2^n$;当 $b\neq 1$ 时,因为 $a_1-\frac{1}{2-b}\cdot 2^1=\frac{2(1-b)}{2-b}$,所以 $\left\{a_n-\frac{1}{2-b}\cdot 2^n\right\}$ 是首项为 $\frac{2(1-b)}{2-b}$,公比为 b 的等比数列,所以 $a_n-\frac{1}{2-b}\cdot 2^n=\frac{2(1-b)}{2-b}\cdot b^{n-1}$,所以 $a_n=\frac{1}{2-b}[2^n+(2-2b)b^{n-1}]$. 当 $b=1$ 时也满足此式.

综上所述,当 $b=2$ 时,$a_n=(n+1)\cdot 2^{n-1}$;

当 $b\neq 2$ 时,$a_n=\frac{1}{2-b}[2^n+(2-2b)b^{n-1}]$.

14. (1)设第一年初鱼的重量为 a,用 a_n 表示第 n 年末鱼的重量. 又设第 n 年的增长率为 q_n,于是 $q_n=200\%\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

由题意得 $a_n=a_{n-1}(1+q_n)=a_{n-1}\left[1+200\%\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$,$n\geqslant 2$,$n\in\mathbf{N}^*$.

$\therefore a_1=a(1+200\%)=3a$,$a_2=a_1(1+100\%)=6a$,$a_3=a_2(1+50\%)=9a$,$a_4=a_3(1+25\%)=\frac{45}{4}a$,$a_5=a_4(1+12.5\%)=\frac{405}{32}a$,

故养殖 5 年后鱼的重量是原来的 $\frac{405}{32}$ 倍.

(2)由(1)知此时 $a_n=a_{n-1}\left[1+200\%\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]\times(1-10\%)(n\geqslant 2)$,

$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\left[1+200\%\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]\times\frac{9}{10}$.

令 $\frac{a_n}{a_{n-1}}<1$,即 $\left[1+200\%\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]\times\frac{9}{10}<1$,$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\frac{1}{18}$,$2^{n-1}>18$,$n>5$,

即 6 年后鱼的存量开始下降.

15. (1)由已知,得 $\begin{cases}a_n=a+(n-1)b,\\ b_n=ba^{n-1}.\end{cases}$

由 $a_1<b_1<a_2<b_2<a_3$,得 $\begin{cases}b>a, & ①\\ a+b>b, & ②\\ ab>a+b, & ③\\ a+2b>ab. & ④\end{cases}$

$\because a,b\in\mathbf{N}^*$,由①,得 $b>a\geqslant 1$,得 $b\geqslant 2$,

$\therefore$ 有 $b-1\geqslant 1$ 成立,从而得 $\frac{1}{b-1}\leqslant 1$.

故 $\frac{2}{b-1}\leqslant 2$.

由④,得 $2b>a(b-1)$,

$\therefore a<\frac{2b}{b-1}=\frac{2(b-1)+2}{b-1}=2+\frac{2}{b-1}$. ⑤

由⑤,得 $a<2+2=4$,即 $1\leqslant a<4$.

又由 $b_1<b_2$,知 $a\neq 1$,故 a 只可能取 2 或 3.

当 $a=3$ 时,由①、③、④得 $\begin{cases}b>3,\\ 3b>b+3,\\ 3+2b>3b.\end{cases}$

解不等式组,无解. 故有 $a=2$.

(2)由 $a=2$,得 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式为

$$\begin{cases}a_n=2+(n-1)b,\\ b_n=b\cdot 2^{n-1}.\end{cases}$$

$\because a_m+1=b_n$，$\therefore 2+(m-1)b+1=b\cdot 2^{n-1}$，

即 $3=b(2^{n-1}-m+1)$. ⑥

$\because b\geqslant 2$，且 $2^{n-1}-m+1\in\mathbf{Z}$，又 3 是质数，

所以等式⑥要成立，必须 $\begin{cases}b=3,\\ 2^{n-1}-m+1=1\end{cases}$ 成立，即有 $b=3$，$m=2^{n-1}$.

◆◆ 16. (1) 设第一次最迟应在第 n 个星期播撒该种农药，根据题意，得 $2^{n-1}\leqslant 10^6$，两边取以 2 为底的对数，得 $n-1\leqslant \log_2 10^6=6\log_2 10=\dfrac{6}{\lg 2}$，

$\therefore n\leqslant \dfrac{6}{\lg 2}+1\approx 20.9$.

则第一次最迟应在第 20 个星期播撒这种农药.

(2) 第一次播撒这种农药后，松毛虫的总对数为 $2^{19}\times(1-98\%)=2^{19}\times 2\%=\dfrac{2^{20}}{100}$.

又设再过 t 个星期必须播撒这种农药，此时有 $\dfrac{2^{20}}{100}\times 2^{t-1}\leqslant 10^6$，解得 $t\leqslant 7.58$.

则第二次最迟应在第 27 个星期播撒这种农药.

◆◆ 17. 设 A_n 和 B_n 分别表示第 n 周星期一选 A 菜谱和 B 菜谱的人数，且 $A_1=a$，$A_n+B_n=1\,000$，则

$$A_{n+1}=\frac{4}{5}A_n+\frac{3}{10}B_n=\frac{4}{5}A_n+\frac{3}{10}(1\,000-A_n)$$
$$=\frac{1}{2}A_n+300.$$

$\therefore A_{n+1}-600=\dfrac{1}{2}A_n-300=\dfrac{1}{2}(A_n-600)$.

$\therefore \{A_n-600\}$ 是一个等比数列，且公比为 $\dfrac{1}{2}$，首项为 $a-600$，$\therefore A_n-600=(a-600)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

$\because 0\leqslant a\leqslant 1\,000$，$\therefore -600\leqslant a-600\leqslant 400$，

$\therefore |a-600|\leqslant 600$.

又函数 $f(n)=|a-600|\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ 单调递减，

且 $f(12)=\dfrac{|a-600|}{2^{11}}\leqslant\dfrac{600}{2^{11}}=\dfrac{75}{256}<\dfrac{1}{2}$.

$\therefore$ 当 $n\geqslant 12$ 时，$|a-600|\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}<\dfrac{1}{2}$，而 $A_n\in\mathbf{N}^*$，故从第 12 周开始选 A 菜谱的人数将稳定在 600 人.

第二节　等比数列的前 n 项和

学业测评

◆◆ 1. D 【点拨】$\because S_3=3a_1$，$\therefore 2a_1-a_2-a_3=0$ 即 $q^2+q-2=0$. $\therefore q=1$ 或 $q=-2$.

【点评】直接应用公式 $S_3=\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}$ 易丢解.

◆◆ 2. C 【点拨】代入选项验证易知 $q=-2$，故选 C.

◆◆ 3. C 【点拨】当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=a-1$；当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(a^n-1)-(a^{n-1}-1)=(a-1)a^{n-1}$；若 $a=1$，$a_n=0(n\in\mathbf{N}^*)$，此时 $\{a_n\}$ 为等差数列；若 $a\neq 1$，$a_n=(a-1)a^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{(a-1)\cdot a^{n-1}}{(a-1)\cdot a^{n-2}}=a$，此时 $\{a_n\}$ 是首项为 $a-1$，公比为 a 的等比数列，故选 C.

【提示】注意多种情况的讨论.

◆◆ 4. D 【点拨】$\because S_7=48$，$S_{14}=60$，$\therefore S_{14}-S_7=60-48=12$. 由等比数列的性质得：$S_7$，$S_{14}-S_7$，$S_{21}-S_{14}$ 依次成等比数列. $\therefore (S_{14}-S_7)^2=S_7(S_{21}-S_{14})$，即 $12^2=48\times(S_{21}-60)$，解得 $S_{21}=63$. 故应选 D.

◆◆ 5. 140

◆◆ 6. 1 【点拨】设 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，则 $S_n-S_{n-1}=a_1q^{n-1}$，$S_{n+1}-S_n=a_1q^n$. 由 $\{S_n\}$ 是等差数列，得 $a_1q^{n-1}=a_1q^n$，$\therefore q=1$.

◆◆ 7. 解法一：由已知可得方程组 $\begin{cases}a_3=a_1\cdot q^2=-12,\\ S_3=\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=-9,\end{cases}$ 解得 $q=-2$.

解法二：$S_3=\dfrac{a_3\left[1-\left(\dfrac{1}{q}\right)^3\right]}{1-\dfrac{1}{q}}=-9$，解得 $q=-2$.

◆◆ 8. $\because \dfrac{3}{2}=1\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{9}{4}=2\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{25}{8}=3\dfrac{1}{8}$，$\dfrac{65}{16}=$

$4\frac{1}{16},\cdots$

$\therefore S_n=1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2^2}+3\frac{1}{2^3}+4\frac{1}{2^4}+\cdots+\left(n\frac{1}{2^n}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(2+\frac{1}{2^2}\right)+\left(3+\frac{1}{2^3}\right)+\left(4+\frac{1}{2^4}\right)+\cdots+\left(n+\frac{1}{2^n}\right)=(1+2+3+4+\cdots+n)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{n^2+n}{2}+1-\frac{1}{2^n}.$

9. $\because S_{2n}=S_n+q^nS_n,S_{3n}=S_{2n}+q^{2n}S_n=S_n+q^nS_n+q^{2n}S_n,$

$\therefore S_n^2+S_{2n}^2=S_n^2+S_n^2(1+q^n)^2=S_n^2(2+2q^n+q^{2n})=S_n[S_n+q^nS_n+(S_n+q^nS_n+q^{2n}S_n)]=S_n(S_{2n}+S_{3n}).$

10. 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由已知得 $\begin{cases}a_1+d=8,\\10a_1+\frac{10\times9}{2}\cdot d=185,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=5,\\d=3,\end{cases}$

故 $a_n=3n+2,b_n=a_{2^n}=3\cdot2^n+2,$

所以 $S_n=3\cdot\frac{2(1-2^n)}{1-2}+2n=3\cdot2^{n+1}+2n-6.$

高考测评

1. B 【点拨】因为 $S_9=\frac{9}{2}(a_1+a_9)=9a_5=-18,S_{13}=\frac{13}{2}(a_1+a_{13})=13a_7=-52$，所以 $a_5=-2,a_7=-4$，又 $b_5=a_5,b_7=a_7$，所以 $q^2=2,b_{15}=b_7\cdot q^8=-4\times16=-64.$

2. C 【点拨】$\because\{a_n\}$ 是等比数列，$a_1=8$. 由 $S_2=a_1+a_2=a_1(1+q)=20$，得 $q=\frac{3}{2}$. 同理由 $S_3=36\Rightarrow q=\frac{-1\pm\sqrt{15}}{2}$. 由 $S_4=65\Rightarrow q=\frac{3}{2}$. 显然 S_3 算错了. 故选 C.

3. D 【点拨】$f(2)=f^2(1),f(3)=f(1)\cdot f(2)=f^3(1),f(4)=f(1)f(3)=f^4(1),a_1=f(1)=\frac{1}{2},\therefore a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n,S_n=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}\in\left[\frac{1}{2},1\right).$

4. C 【点拨】因为数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 3 的等比数列，所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3^{n-1}$，则依题意得，数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=3^{n-1}-2,\therefore b_{n+1}=3^n-2,3b_n=3(3^{n-1}-2)=3^n-6,\therefore b_{n+1}=3b_n+4.$ $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=(1-2)+(3^1-2)+(3^2-2)+(3^3-2)+\cdots+(3^{n-1}-2)=(1+3^1+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1})-2n=\frac{1-3^n}{1-3}-2n=\frac{1}{2}(3^n-1)-2n.$

5. B 【点拨】$\begin{cases}a_n=mq^{n-1},①\\\frac{S_{2n}}{S_n}=\frac{\frac{m(1-q^{2n})}{1-q}}{\frac{m(1-q^n)}{1-q}}=1+q^n,②\end{cases}$

由②得 $q^n=y-1$，代入①得 $x=\frac{m}{q}(y-1)$，即 $qx-my+m=0$，故选 B.

6. B 【点拨】共经过的路程为 $100+\left[100+50+\cdots+100\times\left(\frac{1}{2}\right)^8\right]=299\frac{39}{64}$（米）.

7. C 【点拨】设底层点灯 x 盏，则 $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{2^2}+\cdots+\frac{x}{2^6}=381,\therefore x=192.$

8. $2^n-\frac{1}{2^n}$ 【点拨】$S_{2n}=(1+2+4+\cdots+2^{n-1})+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1-2^n}{1-2}+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=(2^n-1)+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=2^n-\frac{1}{2^n}.$

9. 2^n-1　10 【点拨】由题意可知，依次生成的数的个数是首项为 1，公比为 2 的等比数列，故 $S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$. 当 $x=1$ 时，第 1 次生成的数为 1，第 2 次生成的数为 -1、4，第 3 次生成的数为 1、2、-4、7，第 4 次生成的数为 -1、4、-2、5，4、-1，-7、10. 故 $T_4=10.$

10. (1) 当 $x\neq0,x\neq1,y\neq1$ 时，$\left(x+\frac{1}{y}\right)+$

$\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\cdots+\left(x^n+\frac{1}{y^n}\right)=(x+x^2+\cdots+x^n)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}+\cdots+\frac{1}{y^n}\right)=\frac{x(1-x^n)}{1-x}+\frac{\frac{1}{y}\left(1-\frac{1}{y^n}\right)}{1-\frac{1}{y}}=\frac{x(1-x^n)}{1-x}+\frac{y^n-1}{y^{n+1}-y^n}.$

(2)当 $x=0$ 且 $y\neq 1$ 时,$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\cdots+\left(x^n+\frac{1}{y^n}\right)=\frac{y^n-1}{y^{n+1}-y^n}.$

(3)当 $x=1$ 且 $y\neq 1$ 时,$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\cdots+\left(x^n+\frac{1}{y^n}\right)=n+\frac{y^n-1}{y^{n+1}-y^n}.$

◆ 11.(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,

$\because T_n=na_1+(n-1)a_2+\cdots+2a_{n-1}+a_n$,

由$\begin{cases}T_1=1,\\T_2=4,\end{cases}$得$\begin{cases}a_1=1,\\2a_1+a_2=4,\end{cases}$$\therefore\begin{cases}a_1=1,\\a_2=2.\end{cases}$

$\therefore q=2$,故$\{a_n\}$的首项 $a_1=1$,公比 $q=2$.

(2)解法一:由(1)知 $a_1=1,q=2$,

$\therefore a_n=a_1\cdot q^{n-1}=2^{n-1}$.

$\therefore T_n=n\times1+(n-1)\times2+\cdots+2\times2^{n-2}+2^{n-1}$, ①

$2T_n=n\times2+(n-1)\times2^2+\cdots+2\times2^{n-1}+1\times2^n$, ②

②-①,得 $T_n=-n+2+2^2+\cdots+2^{n-1}+2^n=-n+\frac{2-2\times2^n}{1-2}=-n+2^{n+1}-2=-(n+2)+2^{n+1}$.

解法二:设 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,由(1)知 $a_n=2^{n-1}$,$S_n=2^n-1$.

$\therefore T_n=na_1+(n-1)a_2+\cdots+2a_{n-1}+a_n=a_1+(a_1+a_2)+\cdots+(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n)=S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n=(2-1)+(2^2-1)+\cdots+(2^n-1)=(2+2^2+\cdots+2^n)-n=\frac{2-2\times2^n}{1-2}-n=-(n+2)+2^{n+1}$.

◆ 12.用 a_n 表示热气球在第 n 分钟里上升的高度,由题意,得 $a_{n+1}=\frac{4}{5}a_n$,因此,数列$\{a_n\}$是首项 $a_1=25$,公比 $q=\frac{4}{5}$的等比数列.

热气球在前 n 分钟里上升的总高度为 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{25\times\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]}{1-\frac{4}{5}}=125\times\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]<125$.

故这个热气球上升的高度不可能超过 125 m.

◆ 13.(1)由 $a_{n+1}=\frac{1}{3}S_n$ 得 $S_{n+1}-S_n=\frac{1}{3}S_n$,

$\therefore S_{n+1}=\frac{4}{3}S_n$,

$\therefore$ 数列$\{S_n\}$是以 $S_1=1$ 为首项,以$\frac{4}{3}$为公比的等比数列.

$\therefore S_n=S_1q^{n-1}=\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$,

$\therefore$ 当 $n\geqslant2$ 时,$S_{n-1}=\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}$,

$\therefore$ 当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=\frac{1}{3}S_{n-1}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}$,

$\therefore a_n=\begin{cases}1\ (n=1),\\\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}\ (n\geqslant2).\end{cases}$

(2)由(1)可知 $a_2,a_4,\cdots,a_{2n}$是首项为$\frac{1}{3}$,公比为$\left(\frac{4}{3}\right)^2$,项数为 n 的等比数列,$\therefore a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{3}\right)^{2n}}{1-\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{3}{7}\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{2n}-1\right]$.

◆ 14.(1)$\because S_{2m}+S_{2n}<2S_{m+n}\Rightarrow 2ma_1+\frac{2m(2m-1)}{2}d+2na_1+\frac{2n(2n-1)}{2}d<2\left[(m+n)a_1+\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}\cdot d\right]\Rightarrow(m-n)^2d<0$,$\therefore d<0$.

又 $2S_6>S_3$,$\therefore 2\left(6a_1+\frac{6\times5}{2}d\right)>3a_1+\frac{3\times2}{2}d$,

$\therefore 9a_1+27d>0$,$\therefore\frac{a_1}{d}<-3$.

(2)$\because S_{2m}+S_{2n}<2S_{m+n}$,

$\therefore\frac{a_1}{1-q}(1-q^{2m})+\frac{a_1}{1-q}(1-q^{2n})<\frac{2a_1}{1-q}(1-q^{m+n})$,

$\therefore\frac{a_1}{1-q}(-q^{2m}-q^{2n}+2q^{m+n})<0$,

∴ $-\frac{a_1}{1-q}(q^m-q^n)^2<0$，∴ $\frac{a_1}{1-q}>0$.

又 $2S_6>S_3$，∴ $2\frac{a_1}{1-q}(1-q^6)>\frac{a_1}{1-q}(1-q^3)$，

∴ $2q^6-q^3-1<0$，∴ $-\frac{1}{2}<q^3<1$.

又∵ $q>0$，∴ $0<q<1$.

又∵ $\frac{a_1}{1-q}>0$，∴ $a_1>0$，∴ $a_1-q>-1$.

15. (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

∵ $\begin{cases}a_2+a_4=6,\\ S_7=28,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}2a_1+4d=6,\\ 7a_1+\frac{7\times 6}{2}d=28.\end{cases}$

∴ $\begin{cases}a_1=1,\\ d=1.\end{cases}$ ∴ $a_n=n$.

(2) ∵ $b_n=\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{a_na_{n+1}}$，

∴ $T_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}\right)+\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$，

令 $G_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}$， ①

∴ $\frac{1}{2}G_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$， ②

① − ② 得：$\frac{1}{2}G_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{n}{2^{n+1}}$，∴ $G_n=2-\frac{2+n}{2^n}$.

令 $H_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$，∴ $T_n=3-\frac{n+2}{2^n}-\frac{1}{n+1}$.

专题四 数列的综合应用

第一节 数列的通项公式与求和

高考测评

1. B 【点拨】由 $\frac{a_na_{n-1}}{a_{n-1}-a_n}=\frac{a_na_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}$ 可得，$\frac{2}{a_n}=\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_{n+1}}$，∴ 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}(n=1,2,3,4,\cdots)$ 为等差数列，首项为 $\frac{1}{2}$，公差为 $\frac{1}{2}$，∴ $\frac{1}{a_{2\,013}}=\frac{1}{2}+2\,012\times\frac{1}{2}=\frac{2\,013}{2}$，∴ $a_{2\,013}=\frac{2}{2\,013}$.

2. B 【点拨】由 $a_1=a_2=1$，$a_3=2$，得 $\frac{a_3}{a_2}-\frac{a_2}{a_1}=1=d$，设 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=b_n$，则 $b_{n+1}-b_n=1$，且 $b_1=1$.
∴ $b_n=n$，即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=n$，∴ $a_n=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=1\times1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)$，∴ $\frac{a_{2\,015}}{a_{2\,012}}=2\,012\times2\,013\times2\,014$，它的个位数字是 4.

3. A 【点拨】∵ 等式对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 均成立，∴ $n=1,2,3$ 时等式成立，

即 $\begin{cases}1=3(a-b)+c,\\ 1+2\times3=3^2(2a-b)+c,\\ 1+2\times3+3\times3^2=3^3(3a-b)+c,\end{cases}$

整理得 $\begin{cases}3a-3b+c=1,\\ 18a-9b+c=7,\\ 81a-27b+c=34,\end{cases}$

解得 $a=\frac{1}{2}$，$b=c=\frac{1}{4}$.

4. A 【点拨】$a_n=\frac{f_n(0)-1}{f_n(0)+2}=\frac{f_1[f_{n-1}(0)]-1}{f_1[f_{n-1}(0)]+2}=\frac{\frac{2}{f_{n-1}(0)+1}-1}{\frac{2}{f_{n-1}(0)+1}+2}=\frac{2-f_{n-1}(0)-1}{2+2f_{n-1}(0)+2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{f_{n-1}(0)-1}{f_{n-1}(0)+2}=-\frac{1}{2}a_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$，∴ $\{a_n\}$ 构成以 $a_1=\frac{f_1(0)-1}{f_1(0)+2}=\frac{1}{4}$ 为首项，$q=-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列. ∴ $a_n=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，则 $a_{2\,013}=\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{2\,013-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2\,014}$. 故选 A.

5. $\frac{n}{n+1}$ 【点拨】$a_n+a_{n+1}=2n+1$，$a_na_{n+1}=$

$\frac{1}{b_n}, b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$. 由 $a_1=1$，得 $a_2=2, a_3=3, S_1=b_1=\frac{1}{a_1a_2}=\frac{1}{2}, S_2=b_1+b_2=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}=\frac{2}{3}$. 可得，$S_n=\frac{n}{n+1}$.

6. 120 【点拨】$\because a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，$\therefore S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n+1}-1$，令 $\sqrt{n+1}-1=10$，得 $n=120$.

7. $2^{n+1}-2$ 【点拨】$\because a_{n+1}-a_n=2^n$，$\therefore a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^2+2+2=\frac{2-2^n}{1-2}+2=2^n-2+2=2^n$. $\therefore S_n=\frac{2-2^{n+1}}{1-2}=2^{n+1}-2$.

8. $\frac{5}{7}$ 【点拨】$\because \frac{1}{2}+\frac{1+2}{3}+\frac{1+2+3}{4}+\frac{1+2+3+4}{5}+\frac{1+2+3+4+5}{6}=\frac{15}{2}<10$，且 $\frac{1}{2}+\frac{1+2}{3}+\frac{1+2+3}{4}+\frac{1+2+3+4}{5}+\frac{1+2+3+4+5}{6}+\frac{1+2+3+4+5+6}{7}=\frac{21}{2}>10$，可求得 $a_k=\frac{5}{7}$.

9. (1) 由题设 $\frac{1}{1-a_{n+1}}-\frac{1}{1-a_n}=1$，

得 $\left\{\frac{1}{1-a_n}\right\}$ 是公差为 1 的等差数列.

又 $\frac{1}{1-a_1}=1$，故 $\frac{1}{1-a_n}=n$. 所以 $a_n=1-\frac{1}{n}$.

(2) 由(1)得 $b_n=\frac{1-\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}<1$.

10. (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q.

由 $a_3^2=9a_2a_6$ 得 $a_3^2=9a_4^2$，所以 $q^2=\frac{1}{9}$.

由条件可知 $q>0$，故 $q=\frac{1}{3}$.

由 $2a_1+3a_2=1$，得 $2a_1+3a_1q=1$，得 $a_1=\frac{1}{3}$.

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{1}{3^n}$.

(2) $b_n=\log_3a_1+\log_3a_2+\cdots+\log_3a_n=-(1+2+\cdots+n)=-\frac{n(n+1)}{2}$.

故 $\frac{1}{b_n}=-\frac{2}{n(n+1)}=-2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$.

$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}=-2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=-\frac{2n}{n+1}$.

所以数列 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和为 $-\frac{2n}{n+1}$.

11. (1) $a_1=1, a_2=1, a_3=3, a_4=1, a_5=5, a_6=3$.

(2) 第 1 个 5 出现在第 5 项，第 2 个 5 出现在第 $2\times5=10$ 项，第 3 个 5 出现在第 $2^2\times5=20$ 项，第 4 个 5 出现在第 $2^3\times5=40$ 项，依次类推. 第 10 个 5 是该数列的第 $2^9\times5=2\ 560$ 项.

(3) $T_n=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+\cdots+a_{2^n-1}+a_{2^n}=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2^n-1})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2^n})=[1+3+5+7+\cdots+(2^n-1)]+(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2^{n-1}})=4^{n-1}+T_{n-1}$ $(n\geqslant2)$.

用累加法得：$T_n=T_1+4+4^2+\cdots+4^{n-1}=\frac{1}{3}(4^n+2)$ $(n\geqslant2)$.

当 $n=1$ 时，$T_1=2=\frac{1}{3}(4+2)$，

$\therefore$ 对一切正整数 n 都有 $T_n=\frac{1}{3}(4^n+2)$.

12. (1) 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{4}$，所以 $b_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(b_n-\frac{1}{2}\right)$，

则 $\left\{b_n-\frac{1}{2}\right\}$ 是等比数列，首项为 $b_1-\frac{1}{2}=3$，公比为 $\frac{1}{2}$，所以 $b_n-\frac{1}{2}=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，$b_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}$.

(2) 因为 $b_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}$，所以 $T_n=3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\frac{n}{2}=\frac{3\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}+\frac{n}{2}=6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\frac{n}{2}$.

因为不等式 $\frac{12k}{12+n-2T_n}\geqslant2n-7$，

化简得 $k\geqslant\frac{2n-7}{2^n}$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立.

设 $c_n=\frac{2n-7}{2^n}$，则 $c_{n+1}-c_n=\frac{2(n+1)-7}{2^{n+1}}-\frac{2n-7}{2^n}=\frac{9-2n}{2^{n+1}}$.

当 $n\geqslant5$ 时，$c_{n+1}<c_n$，$\{c_n\}$ 为单调递减数列，当 $1\leqslant n<5$，$c_{n+1}>c_n$，$\{c_n\}$ 为单调递增数列，

又 $\frac{1}{16}=c_4<c_5=\frac{3}{32}$，所以，$n=5$ 时，c_n 取得最大值 $\frac{3}{32}$.

所以，要使 $k\geqslant\frac{2n-7}{2^n}$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，$k\geqslant\frac{3}{32}$.

13. (1) 由题意，当 $n=1$ 时，得 $2a_1=a_1+3$，解得 $a_1=3$.

当 $n=2$ 时，得 $2a_2=(a_1+a_2)+5$，解得 $a_2=8$.

当 $n=3$ 时，得 $2a_3=(a_1+a_2+a_3)+7$，解得 $a_3=18$.

所以 $a_1=3$，$a_2=8$，$a_3=18$ 为所求.

(2) 因为 $2a_n=S_n+2n+1$，

所以有 $2a_{n+1}=S_{n+1}+2n+3$ 成立.

两式相减得：$2a_{n+1}-2a_n=a_{n+1}+2$.

所以 $a_{n+1}=2a_n+2(n\in\mathbf{N}^*)$，

即 $a_{n+1}+2=2(a_n+2)$.

所以数列 $\{a_n+2\}$ 是以 $a_1+2=5$ 为首项，公比为 2 的等比数列.

(3) 由 (2) 得：$a_n+2=5\times2^{n-1}$，即 $a_n=5\times2^{n-1}-2(n\in\mathbf{N}^*)$.

则 $na_n=5n\cdot2^{n-1}-2n(n\in\mathbf{N}^*)$.

设数列 $\{5n\cdot2^{n-1}\}$ 的前 n 项和为 P_n，

则 $P_n=5\times1\times2^0+5\times2\times2^1+5\times3\times2^2+\cdots+5\cdot(n-1)\cdot2^{n-2}+5\cdot n\cdot2^{n-1}$，

所以 $2P_n=5\times1\times2^1+5\times2\times2^2+5\times3\times2^3+\cdots+5(n-1)\cdot2^{n-1}+5n\cdot2^n$，

所以 $-P_n=5(1+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1})-5n\cdot2^n$，即 $P_n=(5n-5)\cdot2^n+5(n\in\mathbf{N}^*)$.

所以数列 $\{n\cdot a_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=(5n-5)\cdot2^n+5-2\times\frac{n(n+1)}{2}$，

整理得，$T_n=(5n-5)\cdot2^n-n^2-n+5(n\in\mathbf{N}^*)$.

14. (1) 由 $a_{n+1}=\lambda a_n+\lambda^{n+1}+(2-\lambda)2^n(n\in\mathbf{N}^*,\lambda>0)$，可得 $\frac{a_{n+1}}{\lambda^{n+1}}-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{n+1}=\frac{a_n}{\lambda^n}-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^n+1$.

所以 $\left\{\frac{a_n}{\lambda_n}-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^n\right\}$ 是首项为 0，公差为 1 的等差数列.

所以 $\frac{a_n}{\lambda^n}-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^n=n-1$，

即 $a_n=(n-1)\lambda^n+2^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2) 设 $T_n=\lambda^2+2\lambda^3+\cdots+(n-2)\lambda^{n-1}+(n-1)\lambda^n$， ①

则 $\lambda T_n=\lambda^3+2\lambda^4+\cdots+(n-2)\lambda^n+(n-1)\lambda^{n+1}$， ②

当 $\lambda\neq1$ 时，①－②得 $(1-\lambda)T_n=\lambda^2+\lambda^3+\lambda^4+\cdots+\lambda^n-(n-1)\lambda^{n+1}=\frac{\lambda^2(1-\lambda^{n-1})}{1-\lambda}-(n-1)\lambda^{n+1}$，

$$T_n=\frac{\lambda^2-\lambda^{n+1}}{(1-\lambda)^2}-\frac{(n-1)\lambda^{n+1}}{1-\lambda}=\frac{(n-1)\lambda^{n+2}-n\lambda^{n+1}+\lambda^2}{(1-\lambda)^2},$$

这时数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和

$$S_n=\frac{(n-1)\lambda^{n+2}-n\lambda^{n+1}+\lambda^2}{(1-\lambda)^2}+2^{n+1}-2.$$

当 $\lambda=1$ 时，$T_n=\frac{n(n-1)}{2}$，这时数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{n(n-1)}{2}+2^{n+1}-2$.

所以，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和

$$S_n=\begin{cases}\frac{(n-1)\lambda^{n+2}-n\lambda^{n+1}+\lambda^2}{(1-\lambda)^2}+2^{n+1}-2,\lambda\neq1,\\ \frac{n(n-1)}{2}+2^{n+1}-2,\lambda=1.\end{cases}$$

15. (1) 令 $x_1=x_2=0$，则 $f(0)=2f(0)-2$，

$\therefore f(0)=2$.

(2) 任取 $x_1,x_2\in[0,1]$ 且 $x_1<x_2$，则 $0<x_2-x_1\leqslant1$，$\therefore f(x_2-x_1)\geqslant2$.

$\therefore f(x_2)=f(x_2-x_1+x_1)=f(x_2-x_1)+f(x_1)-2\geqslant f(x_1)$，$\therefore f(x)$ 在 $[0,1]$ 上为增函数，

$\therefore f(x)$ 的最大值为 $f(1)=3$.

(3) $\because S_n=-\frac{1}{2}(a_n-3)(n\in\mathbf{N}^*)$，

$\therefore S_{n-1}=-\frac{1}{2}(a_{n-1}-3)(n\geqslant2)$，

$\therefore a_n=-\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}a_{n-1}(n\geqslant 2)$,

$\therefore a_n=\frac{1}{3}a_{n-1}(n\geqslant 2)$,

又$\because a_1=1\neq 0$,$\therefore \frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{3}(n\geqslant 2)$,

$\therefore$ 数列$\{a_n\}$是以 1 为首项,公比为$\frac{1}{3}$的等比数列,

$\therefore a_n=\frac{1}{3^{n-1}}$. $f(a_{n+1})=f\left(\frac{1}{3^n}\right)=f\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)=3f\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)-4$, $\therefore f\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)=\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3^n}\right)+\frac{4}{3}$,

$\therefore f\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)-2=\frac{1}{3}\left[f\left(\frac{1}{3^n}\right)-2\right]$,

$\therefore \left\{f\left(\frac{1}{3^n}\right)-2\right\}$是以$f\left(\frac{1}{3}\right)-2$为首项,公比为$\frac{1}{3}$的等比数列.

$\therefore f\left(\frac{1}{3^n}\right)-2=\left[f\left(\frac{1}{3}\right)-2\right]\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$,

$\because f(1)=f\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=3f\left(\frac{1}{3}\right)-4$,

$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{3}$,

$\therefore f\left(\frac{1}{3^n}\right)-2=\left(\frac{1}{3}\right)^n$,即$f\left(\frac{1}{3^n}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^n+2$.

$\therefore f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)=f(1)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{3^{n-1}}\right)=3+\frac{1}{3}+2+\frac{1}{3^2}+2+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}+2=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}\right)+2n=\frac{3}{2}+2n-\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}$.

16.(1)由题设知,当$n\geqslant 2$时,$S_{n+1}+S_{n-1}=2(S_n+S_1)$,即$(S_{n+1}-S_n)-(S_n-S_{n-1})=2S_1$.

从而$a_{n+1}-a_n=2a_1=2$.

又$a_2=2$,故当$n\geqslant 2$时,$a_n=a_2+2(n-2)=2n-2$.

所以a_5的值为 8.

(2)由题设知,当$k\in M=\{3,4\}$且$n>k$时,$S_{n+k}+S_{n-k}=2S_n+2S_k$且$S_{n+1+k}+S_{n+1-k}=2S_{n+1}+2S_k$,两式相减得$a_{n+1+k}+a_{n+1-k}=2a_{n+1}$,即$a_{n+1+k}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_{n+1-k}$,所以当$n\geqslant 8$时,$a_{n-6},a_{n-3},a_n,a_{n+3},a_{n+6}$成等差数列,且$a_{n-6},a_{n-2},a_{n+2},a_{n+6}$也成等差数列.

从而当$n\geqslant 8$时,$2a_n=a_{n+3}+a_{n-3}=a_{n+6}+a_{n-6}$(*),且$a_{n+6}+a_{n-6}=a_{n+2}+a_{n-2}$.

所以当$n\geqslant 8$时,$2a_n=a_{n+2}+a_{n-2}$,

即$a_{n+2}-a_n=a_n-a_{n-2}$.

于是当$n\geqslant 9$时,$a_{n-3},a_{n-1},a_{n+1},a_{n+3}$成等差数列,

从而$a_{n+3}+a_{n-3}=a_{n+1}+a_{n-1}$,

故由(*)式知$2a_n=a_{n+1}+a_{n-1}$,

即$a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}$.

当$n\geqslant 9$时,设$d=a_n-a_{n-1}$.

当$2\leqslant m\leqslant 8$时,$m+6\geqslant 8$,从而由(*)式知$2a_{m+6}=a_m+a_{m+12}$,故$2a_{m+7}=a_{m+1}+a_{m+13}$.

从而$2(a_{m+7}-a_{m+6})=a_{m+1}-a_m+(a_{m+13}-a_{m+12})$,于是$a_{m+1}-a_m=2d-d=d$.

因此,$a_{n+1}-a_n=d$对任意$n\geqslant 2$都成立.

又由$S_{n+k}+S_{n-k}-2S_n=2S_k(k\in\{3,4\})$可知,$(S_{n+k}-S_n)-(S_n-S_{n-k})=2S_k$,故$9d=2S_3$且$16d=2S_4$. 解得$a_4=\frac{7}{2}d$,从而$a_2=\frac{3}{2}d$,$a_3=\frac{5}{2}d$,又由$S_3=\frac{9}{2}d=a_1+a_2+a_3$,得$a_1=\frac{d}{2}$.

因此,数列$\{a_n\}$为等差数列. 由$a_1=1$知$d=2$.

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-1$.

第二节 数列的综合应用

高考测评

1. B 【点拨】因为第 7 行的最后一个数是$2^0+2^1+\cdots+2^6=\frac{1-2^7}{1-2}=2^7-1=127$,所以,第 8 行的第 5 个数是$127+5=132$.

2. C 【点拨】易得题图(1)中数列的递推公式为$a_n=a_{n-1}+n(n\geqslant 2)$. 由$a_n-a_{n-1}=n$,得$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=n+(n-1)+\cdots+2+1=\frac{n(n+1)}{2}$. 而题图(2)中数列的通项公式为$a_n=n^2$. 所给的选

项中只有 1 225 满足 $a_{49}=\frac{49\times50}{2}=b_{35}=35^2=1\ 225$,故 C 成立.

◆ 3. D 【点拨】$S_{19}=1+3+3+4+6+5+10+6+15+7+21+8+28+9+36+10+45+11+55=283$. 故选 D.

◆ 4. 21 【点拨】函数 $y=x^2(x>0)$ 在点 (a_1,a_1^2) 处 $(a_1=16)$ 即点 $(16,256)$ 处的切线方程为 $y-256=32(x-16)$. 令 $y=0$ 得 $a_2=8$;同理函数 $y=x^2(x>0)$ 在点 (a_2,a_2^2) 处 $(a_2=8)$ 即点 $(8,64)$ 处的切线方程为 $y-64=16(x-8)$. 令 $y=0$ 得 $a_3=4$,依次同理求得 $a_4=2,a_5=1$. 所以 $a_1+a_3+a_5=21$.

◆ 5. $(c_1\cdot c_2^2\cdot c_3^3\cdot\cdots\cdot c_n^n)^{\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}}$

【点拨】加法类比为乘法,na_n 变为 c_n^n,除以 $1+2+3+\cdots+n$ 变为开 $1+2+3+\cdots+n$ 次方,从而可猜测 $d_n=(c_1\cdot c_2^2\cdot c_3^3\cdot\cdots\cdot c_n^n)^{\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}}$.

当 $d_n=(c_1\cdot c_2^2\cdot c_3^3\cdot\cdots\cdot c_n^n)^{\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}}$ 时,设数列 $\{c_n\}$ 的公比为 q,容易计算出 $d_n=c_1\cdot q^{\frac{2(n-1)}{3}}$,所以数列 $\{d_n\}$ 是以 c_1 为首项,公比为 $q^{\frac{2}{3}}$ 的等比数列.

◆ 6. C 【点拨】正方体按从下向上的顺序棱长构成等比数列,其棱长分别为:$2,\sqrt{2},1,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2},\cdots$,$n$ 层正方体的表面积为 $8+\frac{16\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=40-32\left(\frac{1}{2}\right)^n$. 由已知:$40-32\left(\frac{1}{2}\right)^n>39$,整理得 $2^n>32$,$\therefore n>5$.

◆ 7. B 【点拨】由题意可知,从早晨 6 时 30 分开始,接下来的每个 30 分钟内进入的人数构成以 4 为首项,2 为公比的等比数列,出来的人数构成以 1 为首项,1 为公差的等差数列,记第 n 个 30 分钟内进入公园的人数为 a_n,第 n 个 30 分钟内出来的人数为 b_n,则 $a_n=4\times2^{n-1}$,$b_n=n$,则上午 11 时 30 分公园内的人数为 $S_{10}=2+\frac{4(1-2^{10})}{1-2}-\frac{10(1+10)}{2}=2^{12}-57$,所以答案为 B.

◆ 8. 5 【点拨】设第 n 个同学报出的数为 a_n,则 $a_n+a_{n+1}=a_{n+2}$,$\therefore a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$,$a_{n+3}=a_{n+1}+a_{n+2}=a_n+2a_{n+1}$,$a_{n+4}=a_{n+3}+a_{n+2}=2a_n+3a_{n+1}$,$\therefore a_{n+4}+a_n=3a_n+3a_{n+1}=3(a_n+a_{n+1})$. 又 a_n 为大于 0 的整数,$\therefore a_n$ 被 3 整除时,a_{n+4} 也被 3 整除;a_n 不被 3 整除时,a_{n+4} 也不被 3 整除. 又 $a_1=1,a_2=1,a_3=2,a_4=3,a_5=5$,$\therefore \{a_n\}$ 中被 3 整除的数为 $a_{4+4k}(k\in\mathbf{N})$,又甲报出的数为 $a_{1+5m}(m\in\mathbf{N})$,$\therefore$ 甲报出的数 a_{1+5m} 被 3 整除时,存在 $k\in\mathbf{N}$,使 $1+5m=4+4k$,$\therefore k=\frac{5m-3}{4}=m+\frac{m-3}{4}$,$\therefore m-3$ 被 4 整除,设 $m-3=4p(p\in\mathbf{N})$,则 $m=4p+3$. $\because 1\leqslant1+5m\leqslant100$,$\therefore 0\leqslant m\leqslant19.8$,$\therefore 0\leqslant4p+3\leqslant19.8$,$\therefore -0.75\leqslant p\leqslant4.2$,$\therefore p$ 只能取 0,1,2,3,4 共 5 个整数,$\therefore m$ 只能取 3,7,11,15,19 共 5 个整数,$\therefore$ 甲报出的数只有 5 次能被 3 整除,$\therefore$ 甲拍了 5 次手.

◆ 9. 1 146 【点拨】显然第 n 行中最右端的一个数为 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$,则左边的第一个数比第 $n-1$ 行的最后一个数多 1,$\therefore$ 第 n 行中两端的两数之和为 $\frac{(n-1)n}{2}+1+\frac{n(n+1)}{2}=n^2+1$. 故前 n 行中两斜线上所有数之和为 $1+(2^2+1)+(3^2+1)+\cdots+(n^2+1)=1^2+2^2+\cdots+n^2+(n-1)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+n-1$. 而前 n 行中所有的自然数之和为 $1+2+3+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{4}\left[\frac{n(n+1)}{2}+1\right]$. 故前 n 行中划去斜线上的数后的所有自然数之和为 $\frac{n(n+1)}{4}\cdot\left[\frac{n(n+1)}{2}+1\right]-\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n-1)\right]$.

当 $n=10$ 时,其和为 1 146.

也可以写出所有数,直接求其和.

◆ 10. 设 n 天后所剩的该品牌商品的件数为 a_n(9 月 1 日为第 1 天),

则 $a_1=a$,$a_2=a\times80\%+\frac{1}{4}a$,

$a_{n+1}=a_n\times80\%+\frac{1}{4}a=\frac{4}{5}a_n+\frac{1}{4}a$,

$\therefore a_{n+1}-\frac{5}{4}a=\frac{4}{5}\left(a_n-\frac{5}{4}a\right)$,

$\therefore$ 数列 $\left\{a_n-\frac{5}{4}a\right\}$ 为等比数列,且首项为 $-\frac{1}{4}a$,

$\therefore a_n-\frac{5}{4}a=-\frac{1}{4}a\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$,

即 $a_n=\frac{5}{4}a-\frac{1}{4}a\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$.

而 $a_{12}=\frac{5}{4}a-\frac{1}{4}a\left(\frac{4}{5}\right)^{11}\approx\frac{5}{4}a-\frac{1}{4}a\times 0.0859\approx1.23a$，且 $a_n=\frac{5}{4}a-\frac{1}{4}a\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}<\frac{5}{4}a$，

由 $1.23a>4.9m$ 且 $\frac{5}{4}a<5m$，知 $3.984m<a<4m$.

故在 $(3.984m,4m)$ 内取一个 a 的值即可.

11. (1)由已知可得 $\begin{cases}q+3+a_2=12,\\3+a_2=q^2,\end{cases}$

消去 a_2 得 $q^2+q-12=0$，

解得 $q=3$ 或 $q=-4$（舍），∴ $a_2=6,d=3$，

从而 $a_n=3n,b_n=3^{n-1}$.

(2)由(1)知：$c_n=3b_n-\lambda\cdot2^{\frac{a_n}{3}}=3^n-\lambda2^n$.

∵ $c_{n+1}>c_n$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，即：$3^{n+1}-\lambda\cdot2^{n+1}>3^n-\lambda\cdot2^n$ 恒成立，整理得：$\lambda\cdot2^n<2\cdot3^n$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，即 $\lambda<2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立.

∵ $y=2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增，∴ $y_{\min}=2\times\frac{3}{2}=3$，∴ $\lambda<3$.

∴ λ 的取值范围为 $(-\infty,3)$.

12. (1)设 $P_{k-1}(x_{k-1},0)$，由 $y'=e^x$ 得 $Q_{k-1}(x_{k-1},e^{x_{k-1}})$ 点处切线方程为 $y-e^{x_{k-1}}=e^{x_{k-1}}(x-x_{k-1})$，

由 $y=0$ 得 $x_k=x_{k-1}-1(2\leqslant k\leqslant n)$.

(2)由 $x_1=0,x_k-x_{k-1}=-1$，得 $x_k=-(k-1)$，所以 $|P_kQ_k|=e^{x_k}=e^{-(k-1)}$，于是 $S_n=|P_1Q_1|+|P_2Q_2|+|P_3Q_3|+\cdots+|P_nQ_n|=1+e^{-1}+e^{-2}+\cdots+e^{-(n-1)}=\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}=\frac{e-e^{1-n}}{e-1}$.

13. (1)当 $n\leqslant6$ 时，数列 $\{a_n\}$ 是首项为120，公差为 -10 的等差数列，$a_n=120-10(n-1)=130-10n$；

当 $n\geqslant7$ 时，数列 $\{a_n\}$ 是以 a_6 为首项，公比为 $\frac{3}{4}$ 的等比数列，

又 $a_6=70$，所以 $a_n=70\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-6}$.

因此，第 n 年初，M 的价值 a_n 的表达式为

$$a_n=\begin{cases}130-10n,n\leqslant6,\\70\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-6},n\geqslant7.\end{cases}$$

(2)设 S_n 表示数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，由等差及等比数列的求和公式得

当 $1\leqslant n\leqslant6$ 时，$S_n=120n-5n(n-1)$，$A_n=120-5(n-1)=125-5n$；

当 $n\geqslant7$ 时，由于 $S_6=570$，故 $S_n=S_6+(a_7+a_8+\cdots+a_n)=570+70\times\frac{3}{4}\times4\times\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-6}\right]=780-210\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-6}$，$A_n=\frac{780-210\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-6}}{n}$.

因为 $\{a_n\}$ 是递减数列，所以 $\{A_n\}$ 是递减数列，又 $A_8=\frac{780-210\times\left(\frac{3}{4}\right)^2}{8}=82\frac{47}{64}>80$，$A_9=\frac{780-210\times\left(\frac{3}{4}\right)^3}{9}=76\frac{79}{96}<80$，

所以须在第9年初对 M 更新.

14. (1)由已知 $a_n=\frac{a_{n-1}}{(-1)^na_{n-1}-2}$ 得 $\frac{1}{a_n}=\frac{(-1)^na_{n-1}-2}{a_{n-1}}=(-1)^n-\frac{2}{a_{n-1}}$，$\frac{1}{a_n}+(-1)^n=2\cdot(-1)^n-\frac{2}{a_{n-1}}=-2\left[\frac{1}{a_{n-1}}+(-1)^{n-1}\right]$.

又 $\frac{1}{a_1}-1=3\neq0$，故 $\left\{\frac{1}{a_n}+(-1)^n\right\}$ 为公比为 -2 的等比数列.

(2)由(1)得 $\frac{1}{a_n}+(-1)^n=(4-1)\cdot(-2)^{n-1}=3\cdot(-2)^{n-1}$.

所以 $\frac{1}{a_n}=3\cdot(-2)^{n-1}-(-1)^n$，$a_n=\frac{1}{3\cdot(-2)^{n-1}-(-1)^n}$，

$$c_n=a_n\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}=\frac{1}{3\cdot(-2)^{n-1}-(-1)^n}\cdot(-1)^{n-1}=\frac{1}{3\cdot2^{n-1}+1}<\frac{1}{3\cdot2^{n-1}}.$$

所以 $T_n<\frac{\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\left[1-\right.$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n\Big]<\frac{2}{3}$.

15. (1) 当 $n=1$ 时, $a_1=S_1=2$; 当 $n>1$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=n+1$, 则 $a_n=n+1(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2) 当 n 为偶数时, $T_n=(a_1+a_3+\cdots+a_{n-1})+(2^2+2^4+\cdots+2^n)=\frac{n^2+2n}{4}+\frac{4}{3}(2^n-1)$.

当 n 为奇数时, $n-1$ 为偶数, $T_n=(a_1+a_3+\cdots+a_n)+(2^2+2^4+\cdots+2^{n-1})=\frac{n^2+4n+3}{4}+\frac{4}{3}(2^{n-1}-1)$.

则 $T_n=\begin{cases}\frac{n^2+2n}{4}+\frac{4}{3}(2^n-1), n\text{ 为偶数},\\ \frac{n^2+4n+3}{4}+\frac{4}{3}(2^{n-1}-1), n\text{ 为奇数}.\end{cases}$

(3) 记 $d_n=T_n-P$, 当 n 为偶数时, $d_n=\frac{4}{3}(2^n-1)-\frac{47n}{2}$, $d_{n+2}-d_n=2^{n+2}-47$. 所以从第4项开始, 数列$\{d_n\}$的偶数项开始递增, 而且 $d_2,d_4,\cdots,d_{10}$均小于2 012, $d_{12}>2\,012$, 则 $d_n\neq2\,012$ (n为偶数).

当 n 为奇数时, $d_n=\frac{4}{3}(2^{n-1}-1)-23n+\frac{3}{4}$, $d_{n+2}-d_n=2^{n+1}-46$. 所以从第5项开始, 数列$\{d_n\}$的奇数项开始递增, 而且 $d_1,d_3,\cdots,d_{11}$均小于2 012, $d_{13}>2\,012$, 则 $d_n\neq2\,012$(n为奇数).

故李四同学的观点是正确的.

16. (1) 2^{n-1}是 S_n 与 a_n 的等差中项$\Leftrightarrow S_n=2^n-a_n$,

$\therefore a_1=S_1=2-a_1\Rightarrow a_1=1$, $S_n=2^n-a_n\Rightarrow S_{n+1}=2^{n+1}-a_{n+1}$,

$\therefore a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=2^{n+1}-a_{n+1}-(2^n-a_n)=2^n+a_n-a_{n+1}$, $\therefore 2a_{n+1}=2^n+a_n$.

$\Rightarrow 2^{n+1}a_{n+1}=4^n+2^na_n\Rightarrow 2^{n+1}a_{n+1}-2^na_n=4^n$,

$\therefore (2^{n+1}a_{n+1}-2^na_n)+(2^na_n-2^{n-1}a_{n-1})+\cdots+(2^2a_2-2a_1)=4^n+4^{n-1}+\cdots+4=\frac{4}{3}(4^n-1)\Rightarrow 2^{n+1}a_{n+1}-2=\frac{4}{3}(4^n-1)$,

$\therefore a_{n+1}=\frac{2}{3}\cdot2^n+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n}$, $a_n=\frac{1}{3}\cdot2^n+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^n}$,

$\therefore a_{n+1}-2^n=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2^n}-2^n\right)<0$, $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{3}\cdot2^n-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n}>0$, $\therefore a_n<a_{n+1}<2^n$.

(2) 由(1)得 $a_n=\frac{1}{3}\cdot2^n+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^n}$,

$\frac{3}{2}(a_n-1)=2^{n-1}+\frac{1}{2^n}-\frac{3}{2}\leqslant2^{n-1}-1$,

$3a_n-1=2^n+\frac{2}{2^n}-1>2^n-1$,

$\therefore$ 只需证: $2^{n-1}-1<\ln b_1+\ln b_2+\cdots+\ln b_n<2^n-1$.

$\sqrt{b_{n+1}}$是 b_n 与 b_n+1 的等比中项$\Rightarrow b_{n+1}=b_n^2+b_n$.

$\because b_2=\mathrm{e}$, $b_n>0$, $n=1$ 时, $b_1^2+b_1=b_2=\mathrm{e}\Rightarrow b_1=\frac{-1+\sqrt{1+4\mathrm{e}}}{2}$.

$\because 4\mathrm{e}>8$, $\therefore b_1>\frac{-1+\sqrt{9}}{2}=1$, $b_1+1=\frac{\mathrm{e}}{b_1}<\mathrm{e}$.

$\ln b_1>\ln1=0=(2^{1-1}-1)$, $\ln b_1<\ln(b_1+1)<1=2^1-1$, 所证不等式成立.

$n\geqslant2$ 时, $b_{n+1}=b_n^2+b_n>b_n^2\Rightarrow\ln b_{n+1}>2\ln b_n$,

$\therefore \ln b_n>2\ln b_{n-1}>\cdots\geqslant2^{n-2}\ln b_2=2^{n-2}$,

$\ln b_1+\ln b_2+\cdots+\ln b_n>0+1+2+2^2+\cdots+2^{n-2}=(2^{n-1}-1)\geqslant\frac{3}{2}(a_n-1)$.

又 $\ln(b_{n+1}+1)=\ln(b_n^2+b_n+1)<\ln(b_n^2+b_n+1+b_n)=\ln(b_n+1)^2=2\ln(b_n+1)$,

$\therefore \ln(b_n+1)<2\ln(b_{n-1}+1)<2^2\ln(b_{n-2}+1)<\cdots<2^{n-2}\ln(b_2+1)<2^{n-1}$,

$\ln b_1+\ln b_2+\cdots+\ln b_n<\ln(b_1+1)+\ln(b_2+1)+\cdots+\ln(b_n+1)<1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1<3a_1-1$,

综上所述, 总有 $\frac{3}{2}(a_n-1)<\ln b_1+\ln b_2+\cdots+\ln b_n<3a_n-1$ 成立.