答案与解析

第一部分 三角函数

专题一 三角函数

第一节 任意角和弧度制

学业测评

1. C 【解析】钝角的范围为(90°,180°). 注意锐角、钝角和象限角的联系和区别.

2. D 【解析】$1\ 920°=\frac{1\ 920}{180}\pi=\frac{32}{3}\pi$.

3. A 【解析】角 α 的终边与角 $-\alpha$ 的终边关于 x 轴对称.

4. D 【解析】终边在直线 $y=x$ 上的角的集合是 $\left\{\alpha \middle| \alpha=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in \mathbf{Z}\right\}$ 终边在某直线上的角的集合可表示为 $\{\beta|\beta=k\pi+\alpha,k\in \mathbf{Z}\}$,$\alpha$ 为直线向上的方向与 x 轴正方向所成的角.

5. B 【解析】$S=\frac{1}{2}\cdot r\cdot l=\frac{1}{2}\alpha\cdot r^2=1$,
$\therefore \alpha=2$.

6. B 【解析】扇形半径 $r=\frac{1}{\sin 1}$,故弧长 $l=\alpha\cdot r=\frac{2}{\sin 1}$.

7. A 【解析】$-\frac{11\pi}{4}=-2\pi-\frac{3\pi}{4}$.

8. 240° −120° 【解析】$-1\ 560°=(-5)\times 360°+240°$,而 $240°=360°-120°$,故最小正角为240°,而最大负角为−120°.

9. 100 cm 【解析】P 点随着轮子的旋转也转过了25弧度角,且 P 点在以4为半径的圆周上,故 P 点转过的弧长为 $l=\alpha\cdot r=25\times 4\ \text{cm}=100\ \text{cm}$.

10. (1) $\{\alpha|\alpha=k\cdot 360°-1\ 840°,k\in \mathbf{Z}\}$
(2) $-6\times 360°+320°$ (3) −40°或320°

【解析】$\because \alpha\in M$,且 $-360°\leqslant\alpha\leqslant 360°$,
$\therefore -360°\leqslant k\cdot 360°-1\ 840°\leqslant 360°$.
$\therefore 1\ 480°\leqslant k\cdot 360°\leqslant 2\ 200°$,
$\therefore \frac{37}{9}\leqslant k\leqslant\frac{55}{9}$. $\because k\in \mathbf{Z}$,
$\therefore k=5$ 或 6,故 $\alpha=-40°$ 或 $\alpha=320°$.

高考测评

1. D 【解析】终边互为反向延长线的两角相差 $(2k+1)\pi(k\in \mathbf{Z})$,选项C仅是其中一种情况,故选D.

2. C 【解析】$\because \alpha=54°=\frac{3\pi}{10}=\frac{l}{r}$,$\therefore l=\frac{3\pi}{10}\cdot 20=6\pi(\text{cm})$,$\therefore$ 扇形的周长为 $l+2r=(40+6\pi)\text{cm}$.

3. C 【解析】$\because \theta\in\left\{\alpha \middle| \alpha=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4},k\in \mathbf{Z}\right\}$,$\therefore$ 设 $\theta=n\pi+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{4}(n\in \mathbf{Z})$.
当 $n=2m(m\in \mathbf{Z})$ 时,$\theta=2m\pi+\frac{\pi}{4}$,在第一象限;
当 $n=2m+1(m\in \mathbf{Z})$ 时,$\theta=2m\pi+\frac{3\pi}{4}$,在第二象限. $\therefore \theta$ 在第一或第二象限. 故选C.

4. D 【解析】$-1\ 485°=-1\ 440°-45°=-8\pi-\frac{\pi}{4}=-10\pi+\frac{7\pi}{4}$.

5. D 【解析】$k=0$ 时,$A=\{\alpha|0\leqslant\alpha\leqslant\pi\}$;
$k=1$ 时,$A=\{\alpha|2\pi\leqslant\alpha\leqslant 3\pi\}$;…. 即 $k\geqslant 1$ 时,$A\cap B=\varnothing$. 而 $k=-1$ 时,$A=\{\alpha|-2\pi\leqslant\alpha\leqslant-\pi\}$;
$k\leqslant -2$ 时,$A\cap B=\varnothing$. 故 $A\cap B=[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$.

6. B 【解析】时针一小时顺时针转30°,即 $-\frac{\pi}{6}$ rad.

7. C 【解析】熟练掌握并应用各类角的概念进行判别. α 是第一象限角,$\frac{\alpha}{2}$ 应为第一、第三象限角;$\alpha+k\cdot 360°(k\in \mathbf{Z})$ 表示与 α 终边相同的角,其中 α 为任意角;若 $\alpha=360°$,$2\alpha=720°$,则 2α 与 α 的终边相同. 终边相同的角不一定相等,但相等的角终边一定相同.

8. D 【解析】分 $a>0$ 和 $a<0$ 两种情形讨论分析.

当 $a>0$ 时,点 (a,a) 在第一象限,此类角可记作 $\left\{\alpha \middle| \alpha=2k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$;当 $a<0$ 时,点 (a,a) 在第三象限,此类角可记作 $\left\{\alpha \middle| \alpha=2k\pi+\frac{5}{4}\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$,∴ 角 α 的集合为 $\left\{\alpha \middle| \alpha=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

9. 第三或第四象限或终边在 y 轴的非正半轴上 【解析】由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi$,得 $4k\pi-\pi<2\alpha<4k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

10. 由于 α 在第二象限,故 $90°+k\cdot360°<\alpha<180°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$.

∴ $180°+2k\cdot360°<2\alpha<360°+2k\cdot360°$,

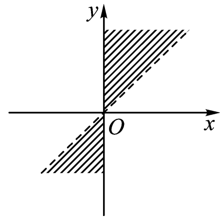
∴ 2α 是第三或第四象限角或终边落在 y 轴非正半轴上.

又 $45°+k\cdot180°<\frac{\alpha}{2}<90°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}$.

设 $k=2n$ 或 $k=2n+1,n\in\mathbf{Z}$.

当 $k=2n$,即 $45°+n\cdot360°<\frac{\alpha}{2}<90°+n\cdot360°(n\in\mathbf{Z})$ 时,$\frac{\alpha}{2}$ 在第一象限;

当 $k=2n+1$,即 $225°+n\cdot360°<\frac{\alpha}{2}<270°+n\cdot360°(n\in\mathbf{Z})$ 时,$\frac{\alpha}{2}$ 在第三象限. 如图中阴影所示.



第 10 题图

11. 设 P、Q 第一次相遇时所用的时间是 t s,则 $t\cdot\frac{\pi}{3}+t\cdot\left|-\frac{\pi}{6}\right|=2\pi$,解得 $t=4$,∴ 第一次相遇的时间为 4 s. 设第一次相遇点为 C,第一次相遇时 P 已运动到终边在 $\frac{\pi}{3}\times4=\frac{4\pi}{3}$ 的位置,

∴ 点 C 的坐标 $x_C=-\cos\frac{\pi}{3}\times4=-2$, $y_C=-\sin\frac{\pi}{3}\times4=-2\sqrt{3}$.

∴ 点 C 坐标为 $(-2,-2\sqrt{3})$,点 P 走过的弧长为 $\frac{4}{3}\pi\times4=\frac{16}{3}\pi$,点 Q 走过的弧长为 $\frac{\pi}{6}\times4\times4=\frac{8}{3}\pi$.

第二节 任意角的三角函数

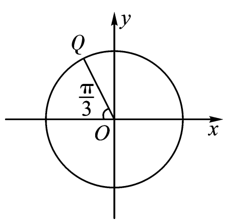
学业测评

1. B 【解析】$r=\sqrt{3+y^2}$, $\sin\beta=\frac{y}{r}=\frac{y}{\sqrt{3+y^2}}=\frac{\sqrt{13}}{13}$,解得 $y=\frac{1}{2}$,故选 B.

2. B 【解析】若 θ 在第一象限,则 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$;若 θ 在第三象限,则 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$,故选 B.

3. B 【解析】取 $a=1$,则 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$;取 $a=-1$,则 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,∴ $\sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,故选 B.

4. A 【解析】本题考查三角函数的定义. 由于点 P 从 $(-1,0)$ 出发,顺时针运动 $\frac{\pi}{3}$ 弧长到达 Q 点,如图所示,因此 Q 点的坐标为 $\left(\cos\frac{2\pi}{3},\sin\frac{2\pi}{3}\right)$,即 $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



第 4 题图

5. $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 【解析】考查使函数表达式有意义的实数的集合,即二次根式的被开方数不小于 0,分式的分母不能为 0,对数式的真数大于 0,

∴ $\begin{cases}\sin x\geqslant0,\\9-x^2>0,\\\cos x>0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}2k\pi\leqslant x\leqslant2k\pi+\pi,\\-3<x<3,\\2k\pi-\frac{\pi}{2}<2k\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases}$ $(k\in\mathbf{Z})$. ∴ $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

6. 二 【解析】∵ 点 P 在第三象限,∴ $\tan\alpha<0$, $\cos\alpha<0$,由 $\tan\alpha<0$ 得 α 在第二、四象限,由 $\cos\alpha<0$ 得 α 在第二、三象限或 x 轴的负半轴上.

7. $\left\{\alpha \middle| 2k\pi+\frac{2}{3}\pi\leqslant\alpha\leqslant2k\pi+\frac{4\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$

【解析】用三角函数线求解.

8. (1) ∵ $105°$, $230°$ 分别为第二、三象限角,

∴ $\sin105°>0$, $\cos230°<0$.

$\therefore \sin 105° \cdot \cos 230° < 0$.

(2) $\because \frac{\pi}{2} < \frac{7\pi}{8} < \pi$. $\therefore \frac{7\pi}{8}$是第二象限角.

$\therefore \sin\frac{7\pi}{8} > 0, \tan\frac{7\pi}{8} < 0$.

$\therefore \sin\frac{7\pi}{8} \cdot \tan\frac{7\pi}{8} < 0$.

(3) $\because \frac{3\pi}{2} < 6 < 2\pi$,

$\therefore$ 6 弧度的角是第四象限角.

$\therefore \cos 6 > 0, \tan 6 < 0$. $\therefore \cos 6 \cdot \tan 6 < 0$.

(4) $\because \pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$, $\therefore \sin 4 < 0$.

又 $-\frac{23\pi}{4} = -6\pi + \frac{\pi}{4}$, $-\frac{23}{4}\pi$ 与$\frac{\pi}{4}$终边相同.

$\therefore \tan\left(-\frac{23\pi}{4}\right) > 0$.

$\therefore \sin 4 \cdot \tan\left(-\frac{23\pi}{4}\right) < 0$.

9. $\because \theta \in \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \pi\right)(k \in \mathbf{Z})$,

$\therefore \cos\theta < 0, x = -3\cos\theta, y = 4\cos\theta$,

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3\cos\theta)^2 + (4\cos\theta)^2} = -5\cos\theta$,

$\therefore \sin\alpha = -\frac{4}{5}, \cos\alpha = \frac{3}{5}, \tan\alpha = -\frac{4}{3}$,

$\cot\alpha = -\frac{3}{4}, \sec\alpha = \frac{5}{3}, \csc\alpha = -\frac{5}{4}$.

10. $\because r = \sqrt{x^2 + 9}, \cos\theta = \frac{x}{r}$,

$\therefore \frac{\sqrt{10}}{10}x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$. 又 $x \neq 0$, 则 $x = \pm 1$.

又 $y = 3 > 0$, $\therefore \theta$ 是第一或第二象限角.

当 θ 为第一象限角时, $\sin\theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \tan\theta = 3$;

当 θ 为第二象限角时, $\sin\theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \tan\theta = -3$.

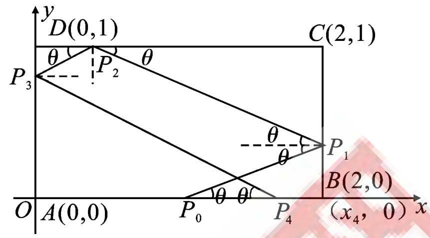
高考测评

1. A 【解析】分析知 α 的终边位于第三象限,故 $m < 0, n < 0, n = 3m$, 且 $\sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{10}$, $\therefore m = -1, n = -3, m - n = 2$.

2. C 【解析】$\because \theta$ 是第二象限角, $\therefore 2k\pi + \frac{\pi}{2} < \theta < 2k\pi + \pi$. $\therefore k\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, $\therefore \frac{\theta}{2}$是第一、三象限角, $\therefore \tan\frac{\theta}{2} > 0$.

3. C 【解析】由正、余弦线方向相反知, α 的终边在第二、四象限;再由正、余弦线的长度相等知, α 的终边在第二、四象限的角平分线上.

4. C 【解析】如图所示,由反射定律:入射角等于反射角,有 $\angle P_1P_0B = \angle P_1P_2C$, 从而 $\angle P_1P_2C = \theta$, 同理 $\angle P_3P_2D = \angle P_3P_4A = \theta$.



第 4 题图

$\because P_0B = 1, \frac{BP_1}{P_0B} = \tan\theta$, $\therefore BP_1 = \tan\theta$,

$\therefore P_1C = 1 - \tan\theta$.

$\because \frac{P_1C}{P_2C} = \tan\theta$, $\therefore P_2C = \frac{1 - \tan\theta}{\tan\theta}$.

$\therefore DP_2 = 2 - \frac{1 - \tan\theta}{\tan\theta} = \frac{3\tan\theta - 1}{\tan\theta}$.

$\because \frac{P_3D}{DP_2} = \tan\theta$, $\therefore P_3D = 3\tan\theta - 1$,

$\therefore AP_3 = 1 - (3\tan\theta - 1) = 2 - 3\tan\theta$.

$\because \frac{AP_3}{AP_4} = \tan\theta$, $\therefore AP_4 = \frac{2 - 3\tan\theta}{\tan\theta}$.

$\therefore x_4 = \frac{2 - 3\tan\theta}{\tan\theta}$.

$\because 1 < x_4 < 2$,

$\therefore 1 < \frac{2 - 3\tan\theta}{\tan\theta} < 2, 4 < \frac{2}{\tan\theta} < 5$.

$\therefore \frac{2}{5} < \tan\theta < \frac{1}{2}$. 故选 C.

5. $(-2, 3]$ 【解析】$\because \cos\alpha \leqslant 0, \sin\alpha > 0$, $\therefore 3a - 9 \leqslant 0$ 且 $a + 2 > 0$, $\therefore -2 < a \leqslant 3$.

6. $\left\{\theta \,\middle|\, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right\}$ 【解析】结合正弦线、余弦线,可知 $E = \left\{\theta \,\middle|\, \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{5}{4}\pi\right\}$, 当 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin\theta < \tan\theta$, 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $\tan\theta$ 不存在, 当 $\pi \leqslant \theta < \frac{5\pi}{4}$ 时, $\sin\theta \leqslant \tan\theta$.

7. $\because \theta \in \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \pi\right)(k \in \mathbf{Z})$,

$\therefore \cos\theta < 0, x = -3\cos\theta, y = 4\cos\theta$,

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3\cos\theta)^2 + (4\cos\theta)^2}$
$= -5\cos\theta$,

$\therefore \sin\alpha = -\frac{4}{5}, \cos\alpha = \frac{3}{5}, \tan\alpha = -\frac{4}{3}$.

8. 由题意得 $\begin{cases} 2\sin 2x + \sqrt{3} > 0, \\ 9 - x^2 \geqslant 0, \end{cases}$

即$\begin{cases}\sin 2x > -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ -3\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$

由 $\sin 2x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 可得 $2k\pi-\frac{\pi}{3}<2x<2k\pi+\frac{4\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，$\therefore k\pi-\frac{\pi}{6}<x<k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，当 $k=0$ 时，$-\frac{\pi}{6}<x<\frac{2\pi}{3}$；当 $k=-1$ 时，$-\frac{7\pi}{6}<x<-\frac{\pi}{3}$；当 $k=1$ 时，$\frac{5\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{3}$，又由 $-3\leqslant x\leqslant 3$，利用数轴得定义域为 $\left[-3,-\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6},3\right]$.

9. $\because$ 方程有两实根，$\therefore \Delta=4(\cos\theta+1)^2-4\cos^2\theta\geqslant 0$，$\therefore \cos\theta\geqslant -\frac{1}{2}$， ①

由韦达定理得 $\alpha+\beta=-2(\cos\theta+1)$，$\alpha\cdot\beta=\cos^2\theta$，代入 $|\alpha-\beta|\leqslant 2\sqrt{2}$，得 $4(\cos\theta+1)^2-4\cos^2\theta\leqslant 8$.

解得 $\cos\theta\leqslant\frac{1}{2}$， ②

由①、②得 $-\frac{1}{2}\leqslant\cos\theta\leqslant\frac{1}{2}$，

$\therefore \frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant\theta\leqslant\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ 或 $\frac{4\pi}{3}+2k\pi\leqslant\theta\leqslant\frac{5\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

$\therefore \frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant\theta\leqslant\frac{2\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

10. 点 $A(a,b)$ 与点 P 关于 x 轴对称，则点 P 的坐标为 $P(a,-b)$，且 $r=|OP|=\sqrt{a^2+b^2}$，$\therefore \sin\alpha=\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\tan\alpha=-\frac{b}{a}$，$\sec\alpha=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$.

点 $A(a,b)$ 与点 Q 关于 $y=x$ 对称，则点 $Q(b,a)$，且 $r'=|OQ|=\sqrt{a^2+b^2}$，$\therefore \sec\beta=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$，$\cot\beta=\frac{b}{a}$，$\csc\beta=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$.

$\therefore \sin\alpha\sec\beta+\tan\alpha\cdot\cot\beta+\sec\alpha\cdot\csc\beta=-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}+\left(-\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{b}{a}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=-1-\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2+b^2}{a^2}=0$.

11. 在角 α 终边上取点 $P(x,y)$，设 $r=|OP|$，则有左边 $=\dfrac{\frac{x}{y}+\frac{r}{y}-1}{\frac{x}{y}-\frac{r}{y}+1}=\dfrac{x-y+r}{x-r+y}=\dfrac{(x-y+r)(x+y+r)}{(x+y)^2-r^2}=\dfrac{(x+r)^2-y^2}{2xy}=\dfrac{2x^2+2xr}{2xy}=\frac{x}{y}+\frac{r}{y}=\cot\alpha+\csc\alpha=$ 右边.

第三节　同角三角函数的基本关系

学业测评

1. B 【解析】由条件知 $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{5}{13}$.

2. D 【解析】$\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta=1$，得 $\sin\theta\cos\theta=0$，$\therefore(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1$，从而得 $\sin\theta+\cos\theta=\pm 1$，故选 D.

3. A 【解析】$\because \sin A\cos A=\frac{1}{3}>0$，$\therefore \sin A+\cos A=\sqrt{1+2\sin A\cos A}=\sqrt{1+\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$.

4. D 【解析】$\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\therefore\left(\frac{m-3}{m+5}\right)^2+\left(\frac{4-2m}{m+5}\right)^2=1$，$\therefore(m-3)^2+(2m-4)^2=(m+5)^2$. 解得 $m=0$ 或 $m=8$.

5. D 【解析】由于 $\tan\theta=2$，则 $\sin^2\theta+\sin\theta\cdot\cos\theta-2\cos^2\theta=\frac{\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{\tan^2\theta+\tan\theta-2}{\tan^2\theta+1}=\frac{2^2+2-2}{2^2+1}=\frac{4}{5}$. 故选 D.

6. D 【解析】$\because \cot A=-\frac{12}{5}$，$\therefore \tan A=-\frac{5}{12}$.

又 $\cot A=-\frac{12}{5}<0$，$\therefore \frac{\pi}{2}<A<\pi$，

$\therefore \cos A=-\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}=-\frac{12}{13}$. 故选 D.

7. -1 【解析】原式 $=\frac{\sqrt{(\cos 10^\circ-\sin 10^\circ)^2}}{\sin 10^\circ-\sqrt{\cos^2 10^\circ}}=\frac{\cos 10^\circ-\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ-\cos 10^\circ}=-1$.

8. $f(x)=\frac{1}{x^2}+x^2+2$ 【解析】由 $f(\tan x)=$

$\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}=\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\sin^2x}=\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\cos^2x}+\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x}=\tan^2x+1+1+\frac{1}{\tan^2x}=\tan^2x+2+\frac{1}{\tan^2x}$，$f(x)=\frac{1}{x^2}+x^2+2$. 对于已知$f[g(x)]$的表达式求$f(x)$的表达式，可用换元法求解，亦可使用“凑法”求解，此题采用了“凑法”求解.

9. $\because \sin\alpha-\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\frac{1}{2}$，即$1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}$，$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}$.

$\therefore\sin^3\alpha-\cos^3\alpha=(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha)=(\sin\alpha-\cos\alpha)(1+\sin\alpha\cdot\cos\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{5\sqrt{2}}{8}$.

10. 右边 $=\frac{\sec^2\alpha-\tan^2\alpha+\sec\alpha+\tan\alpha}{1+\sec\alpha-\tan\alpha}=\frac{(\sec\alpha-\tan\alpha+1)(\sec\alpha+\tan\alpha)}{1+\sec\alpha-\tan\alpha}=\sec\alpha+\tan\alpha=$左边.

高考测评

1. C 【解析】由于$1+\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta}+\cos\theta\cdot\sqrt{\cos^2\theta}=0$，经讨论知，$\theta$的终边可以落在第三象限、$x$轴负半轴和$y$轴负半轴.

2. B 【解析】由$1-\sin^2x=\cos^2x$，得$\frac{1+\sin x}{\cos x}=-\frac{\cos x}{\sin x-1}=-\frac{1}{2}$.

3. B 【解析】由$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2}{3}$，得$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{4}{9}$，$\therefore\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{5}{18}<0$.

$\because\alpha$为三角形的一个内角，$\therefore 0<\alpha<\pi$，

$\therefore\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$.

$\therefore\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

$\therefore$这个三角形是钝角三角形.

4. D 【解析】由题意，得$\Delta=(-4\sin\theta)^2-4\times6\times\cos\theta<0$，$\therefore 2\cos^2\theta+3\cos\theta-2>0$，$\therefore\cos\theta>\frac{1}{2}$或$\cos\theta<-2$(舍去). 又$\theta\in(0,\pi)$，$\therefore\theta$的取值范围是$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$.

5. -8 【解析】$\because(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\frac{5}{4}$，

即$1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{5}{4}$，$\therefore\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{1}{8}$，

$\therefore\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=-8$.

6. $\frac{1}{2}$ 【解析】$\because xy=\sec^2\alpha-\tan^2\alpha=1$，

又$x=2$，$\therefore y=\frac{1}{2}$.

7. $-\frac{4}{3}$ 【解析】由$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，得$\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{1}{2}$，$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{4}{3}$.

8. $\because\tan\theta=\sqrt{\frac{1-a}{a}}$，$\therefore\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1-a}{a}=\frac{1}{a}-1$，$\therefore a=\cos^2\theta$，$\frac{\sin^2\theta}{a+\cos\theta}+\frac{\sin^2\theta}{a-\cos\theta}=\frac{2a\sin^2\theta}{a^2-\cos^2\theta}=\frac{2\cos^2\theta\sin^2\theta}{\cos^4\theta-\cos^2\theta}=-2$.

9. 由已知得$\tan^2\beta=\frac{\tan^2\alpha-1}{2}$，则$\sin^2\beta=\frac{\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}=\frac{\frac{\tan^2\alpha-1}{2}}{1+\frac{\tan^2\alpha-1}{2}}=\frac{\tan^2\alpha-1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2\tan^2\alpha-(1+\tan^2\alpha)}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}-1=2\sin^2\alpha-1$.

10. 假设存在这样的实数m满足条件，由题设得：

$\Delta=36m^2-32(2m+1)\geqslant0$， ①

$\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{3}{4}m<0$($\because\sin\alpha<0$，$\cos\alpha<0$)，②

$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2m+1}{8}>0$($\because\sin\alpha<0$，$\cos\alpha<0$)， ③

又$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

$\therefore(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-2\sin\alpha\cos\alpha=1$.

把②，③代入上式得：

$\left(-\frac{3}{4}m\right)^2-2\times\frac{2m+1}{8}=1$，

即$9m^2-8m-20=0$，

解得$m_1=2$，$m_2=-\frac{10}{9}$.

$\because m_1=2$不满足条件①，舍去，$m_2=-\frac{10}{9}$不满足条件③，舍去，故这样的实数m不存在.

第四节　三角函数的诱导公式

学业测评

1. B 【解析】$\tan(-600°)=\tan(720°-600°)=\tan 120°=\tan(180°-60°)=-\tan 60°=-\sqrt{3}$.

2. B 【解析】原式 $=\dfrac{\cos\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\dfrac{2\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\dfrac{2}{1-\tan\theta}=-2$.

3. A 【解析】由 $\tan(5\pi+\alpha)=m$，得 $\tan\alpha=m$，∴ 原式 $=\dfrac{-\sin\alpha-\cos\alpha}{-\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=\dfrac{m+1}{m-1}$，故选 A.

4. A 【解析】$a=\tan\left(-\dfrac{7}{6}\pi\right)=-\tan\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；$b=\cos\dfrac{23}{4}\pi=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；$c=\sin\left(-\dfrac{33}{4}\pi\right)=-\sin\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，∴ $b>a>c$，故选 A.

5. 1 【解析】$f(2\pi-x)=\cos\dfrac{2\pi-x}{2}=\cos\left(\pi-\dfrac{x}{2}\right)=-\cos\dfrac{x}{2}=-f(x)$，①不成立；$f(2\pi+x)=\cos\dfrac{2\pi+x}{2}=\cos\left(\pi+\dfrac{x}{2}\right)=-\cos\dfrac{x}{2}=-f(x)$，②不成立；$f(-x)=\cos\left(-\dfrac{x}{2}\right)=\cos\dfrac{x}{2}=f(x)$，③不成立；④成立.

6. -1 【解析】∵ $f(n+12)=\cos\dfrac{(n+12)\pi}{6}=\cos\left(2\pi+\dfrac{n\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{n\pi}{6}=f(n)$，而 $f(1)+f(2)+\cdots+f(6)=\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos\dfrac{2\pi}{6}+\cdots+\cos\dfrac{5\pi}{6}+\cos\dfrac{6\pi}{6}=-1$，$f(7)+f(8)+\cdots+f(12)=1$，…，故 $f(1)+f(2)+\cdots+f(12)=0$. ∴ $f(1)+f(2)+\cdots+f(2\,010)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=-1$.

7. 0 【解析】原式 $=\sin^2 1\,970°-\sin^2 1\,990°=[\sin(22\times 90°-10°)]^2-[\sin(22\times 90°+10°)]^2=\sin^2 10°-(-\sin 10°)^2=0$.

8. 0 【解析】∵ $\dfrac{1}{2k+1}\pi+\dfrac{2k}{2k+1}\pi=\pi$，

∴ $\cos\dfrac{1}{2k+1}\pi=-\cos\dfrac{2k}{2k+1}\pi$.

设 $S_n=\cos\dfrac{1}{2k+1}\pi+\cos\dfrac{2}{2k+1}\pi+\cdots+\cos\dfrac{2k-1}{2k+1}\pi+\cos\dfrac{2k}{2k+1}\pi$，

则 $S_n=\cos\dfrac{2k}{2k+1}\pi+\cos\dfrac{2k-1}{2k+1}\pi+\cdots+\cos\dfrac{2}{2k+1}\pi+\cos\dfrac{1}{2k+1}\pi$. 将上面两式相加，得：

$2S_n=\left(\cos\dfrac{1}{2k+1}\pi+\cos\dfrac{2k}{2k+1}\pi\right)+\left(\cos\dfrac{2}{2k+1}\pi+\cos\dfrac{2k-1}{2k+1}\pi\right)+\cdots+\left(\cos\dfrac{2k-1}{2k+1}\pi+\cos\dfrac{2}{2k+1}\pi\right)+\left(\cos\dfrac{2k}{2k+1}\pi+\cos\dfrac{1}{2k+1}\pi\right)=0+0+\cdots+0+0=0$，∴ $S_n=0$，即原式 $=0$.

9. (1) $f(\theta)=\dfrac{2\cos^3\theta+\sin^2\theta+\cos\theta-3}{2+2\cos^2\theta+\cos\theta}$

$=\dfrac{2\cos^3\theta+1-\cos^2\theta+\cos\theta-3}{2+2\cos^2\theta+\cos\theta}$

$=\dfrac{2\cos^3\theta-2-(\cos^2\theta-\cos\theta)}{2+2\cos^2\theta+\cos\theta}$

$=\dfrac{2(\cos^3\theta-1)-\cos\theta(\cos\theta-1)}{2+2\cos^2\theta+\cos\theta}$

$=\dfrac{2(\cos\theta-1)(\cos^2\theta+\cos\theta+1)-\cos\theta(\cos\theta-1)}{2+2\cos^2\theta+\cos\theta}$

$=\cos\theta-1$.

(2) $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}-1=\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{2}$.

10. 原式 $=\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\tan\alpha\cos(\pi+\alpha)}{\tan\alpha\cdot\tan(\pi+\alpha)\cdot\sin\alpha}=\dfrac{(-\sin\alpha)\cdot\tan\alpha\cdot(-\cos\alpha)}{\tan\alpha\cdot\tan\alpha\cdot\sin\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{\tan\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$.

由 $\sin(\pi+\alpha)=-\dfrac{3}{5}$ 知 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$.

所以 $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\dfrac{16}{25}$，

故原式 $=\dfrac{16}{25}\times\dfrac{5}{3}=\dfrac{16}{15}$.

高考测评

1. A 【解析】$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$，∴ $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$.

2. A 【解析】∵ $\sin(\alpha-360°)-\cos(180°-$

$\alpha)=m$，∴ $\sin\alpha+\cos\alpha=m$，而 $\sin(180°+\alpha)\cdot\cos(180°-\alpha)=(-\sin\alpha)\cdot(-\cos\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{2}=\dfrac{m^2-1}{2}$.

3. C 【解析】① $\sin\left(n\pi+\dfrac{4}{3}\pi\right)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi}{3}(n\text{ 为奇数}),\\-\sin\dfrac{\pi}{3}(n\text{ 为偶数});\end{cases}$ ② $\cos\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}=\sin\dfrac{\pi}{3}$；③ $\sin\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}$；④ $\cos\left[(2n+1)\pi-\dfrac{\pi}{6}\right]=\cos\dfrac{5\pi}{6}=-\sin\dfrac{\pi}{3}$；⑤ $\sin\left[(2n+1)\pi-\dfrac{\pi}{3}\right]=\sin\dfrac{\pi}{3}$，故②③⑤正确，选 C.

4. C 【解析】由已知可得 $-2\tan\alpha+3\sin\beta+5=0$，$\tan\alpha-6\sin\beta-1=0$.

∴ $\tan\alpha=3$，又 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，

∴ $9=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$，$\sin^2\alpha=\dfrac{9}{10}$.

∵ α 为锐角，∴ $\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，选 C.

5. $45\dfrac{1}{2}$ 【解析】∵ $\sin^21°+\sin^289°=\sin^21°+\cos^21°=1$，$\sin^22°+\sin^288°=\sin^22°+\cos^22°=1$，…，∴ 原式 $=44+\left(\dfrac{\sqrt2}{2}\right)^2+1=45\dfrac{1}{2}$.

6. 1 【解析】$f(2\,006)=a\sin(2\,006\pi+\alpha)+b\cos(2\,006\pi+\beta)=-1$，∴ $-1=a\sin\alpha+b\cos\beta$，又 $f(2\,007)=a\sin(2\,007\pi+\alpha)+b\cos(2\,007\pi+\beta)=-a\sin\alpha-b\cos\beta$，∴ $f(2\,007)=1$.

7. -2 【解析】$f\left(-\dfrac{11}{6}\right)=\sin\left(-\dfrac{11}{6}\pi\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$，$f\left(\dfrac{11}{6}\right)=f\left(\dfrac{5}{6}\right)-1=f\left(-\dfrac{1}{6}\right)-2=\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)-2=-\dfrac{5}{2}$，∴ $f\left(-\dfrac{11}{6}\right)+f\left(\dfrac{11}{6}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}=-2$.

8. $f(\theta)=\dfrac{2\cos^3\theta+\sin^2\theta+\cos\theta-3}{2+2\cos^2\theta+\cos\theta}$

$=\dfrac{2\cos^3\theta-\cos^2\theta+\cos\theta-2}{2\cos^2\theta+\cos\theta+2}$

$=\dfrac{(\cos\theta-1)(2\cos^2\theta+\cos\theta+2)}{2\cos^2\theta+\cos\theta+2}$

$=\cos\theta-1$.

∴ $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}-1=\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{2}$.

9. 证明：在 $\triangle ABC$ 中，$A+B+C=\pi$.

(1) $\cos(2A+B+C)=\cos(2A+\pi-A)=\cos(\pi+A)=-\cos A$.

(2) $\tan\dfrac{A+B}{4}=\tan\dfrac{\pi-C}{4}=-\tan\left(\pi-\dfrac{\pi-C}{4}\right)=-\tan\dfrac{3\pi+C}{4}$.

10. ∵ $\sin(\pi-\alpha)\cos(-8\pi-\alpha)=\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{60}{169}$，∴ $1+2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{289}{169}$，$1-2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{49}{169}$.

即 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\dfrac{289}{169}$，$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\dfrac{49}{169}$.

又 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$，∴ $\sin\alpha>\cos\alpha>0$，

∴ $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{17}{13}$，$\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{7}{13}$，

由两式解得 $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$，$\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$.

11. 由已知条件，据诱导公式，化简得

$$\begin{cases}\sin\alpha=\sqrt2\sin\beta, & ①\\ \sqrt3\cos\alpha=\sqrt2\cos\beta. & ②\end{cases}$$

$①^2+②^2$，得 $\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha=2\sin^2\beta+2\cos^2\beta=2$，即 $\sin^2\alpha+3(1-\sin^2\alpha)=2$.

∴ $\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\sin\alpha=\pm\dfrac{\sqrt2}{2}$.

∵ $0<\alpha<\pi$，∴ $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt2}{2}$.

∴ $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$.

把 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$、$\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$ 分别代入②，得 $\cos\beta=\dfrac{\sqrt3}{2}$，$\cos\beta=-\dfrac{\sqrt3}{2}$.

又 $0<\beta<\pi$，∴ $\beta=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{5\pi}{6}$.

故存在 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$，$\beta=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$，$\beta=\dfrac{5\pi}{6}$.

专题二　三角函数的图象、性质及其应用

第一节　正弦函数、余弦函数的图象与性质

学业测评

1. B 【解析】“五点法”作图是当 $2x=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3}{2}\pi,2\pi$ 时的 x 值. ∴ 此时 $x=0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi$. 故选 B.

2. C 【解析】由题得 $\frac{\pi}{3}=\frac{2k\pi}{\omega}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\omega=6k$，令 $k=1$，即得 $\omega_{\min}=6$.

3. C 【解析】由题意知，函数在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得最大值 1，所以 $1=\sin\frac{\omega\pi}{3}$. 故选 C.

4. A 【解析】$f(x)=7\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{15\pi}{2}\right)=7\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{3\pi}{2}\right)=-7\cos\frac{2}{3}x$，∴ $f(x)$ 为偶函数，$T=\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$. 故选 A.

5. C 【解析】注意到 $\sin 168°=\sin(180°-12°)=\sin 12°$，$\cos 10°=\sin 80°$，且 $0°<11°<12°<80°<90°$，因此 $\sin 11°<\sin 12°<\sin 80°$，即 $\sin 11°<\sin 168°<\cos 10°$. 故选 C.

6. D 【解析】∵ $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x(x\in\mathbf{R})$，∴ 函数 $f(x)$ 是最小正周期为 2π 的偶函数. 故选 D.

7. $0<\omega\leqslant\frac{3}{2}$ 【解析】∵ $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$，$\omega>0$，∴ $\omega x\in\left[-\frac{\omega\pi}{3},\frac{\omega\pi}{4}\right]\subseteq\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，

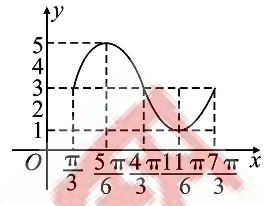
∴ $\begin{cases}-\frac{\omega\pi}{3}\geqslant-\frac{\pi}{2},\\ \frac{\omega\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}.\end{cases}$ ∴ $0<\omega\leqslant\frac{3}{2}$.

8. 19 【解析】∵ $T=\frac{2\pi}{\frac{k}{3}}=\frac{6\pi}{k}$，且 $|T|\leqslant 1$，即 $\left|\frac{6\pi}{k}\right|\leqslant 1$，∴ $k\geqslant 6\pi$，且 k 为自然数，∴ $k_{\min}=19$.

9. (1) 列表：

$x-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$
y	3	5	3	1	3

简图如图所示.



第 9 题图

(2) 值域为 $[1,5]$，

∴ 当 $x-\frac{\pi}{3}\in\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$ 时，即当 $x\in\left[2k\pi-\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{5\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$ 时，函数为增函数.

∴ 单调增区间为 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{5\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$. 当 $x-\frac{\pi}{3}\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$ 时，即当 $x\in\left[2k\pi+\frac{5\pi}{6},2k\pi+\frac{11\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$ 时，函数为减函数.

∴ 单调减区间为 $\left[2k\pi+\frac{5\pi}{6},2k\pi+\frac{11\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$.

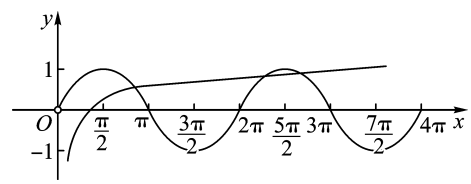
10. 由题意得：$a+b=\frac{3}{2}$，$a-b=-\frac{1}{2}$，

解得 $a=\frac{1}{2}$，$b=1$. ∴ $y=-2\sin x$.

∴ 函数 $y=-4a\sin bx$ 的最大值为 2，最小值为 -2，最小正周期为 2π.

高考测评

1. C 【解析】由 $\sin(x-2\pi)=\lg x$ 可得 $\sin x=\lg x$，其定义域为 $x>0$，在同一坐标系中作出 $y=\sin x$ 和 $y=\lg x$ 的图象，如图所示，由图象知方程 $\sin(x-2\pi)=\lg x$ 有 3 个实数根.



第 1 题图

2. C 【解析】先画出 $y=2\sin|x|$ 的图象，再把函数 $y=2\sin|x|$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，就可以得到函数 $f(x)=2\sin\left|x-\frac{\pi}{2}\right|$ 的图象.

3. A 【解析】由于函数 $f(x)$ 的周期为 5，所以 $f(3)-f(4)=f(-2)-f(-1)$，又 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，∴ $f(-2)-f(-1)=-f(2)+f(1)=-2+1=-1$. 故选 A.

◆ 4. C 【解析】由题意得 $y=\frac{4}{2-\cos x}-1$，而 $1\leqslant 2-\cos x\leqslant 3$，∴ $\frac{4}{3}\leqslant\frac{4}{2-\cos x}\leqslant 4$，∴ $\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 3$.

◆ 5. C 【解析】$y=\sin^2x+\sin x-1=\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$，因为 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，所以当 $\sin x=-\frac{1}{2}$ 时，y 取最小值 $-\frac{5}{4}$；当 $\sin x=1$ 时，y 取最大值 1. 故选 C.

◆ 6. C 【解析】利用单位圆知 $(b-a)_{\min}=\frac{2\pi}{3}$，$(b-a)_{\max}=\frac{4\pi}{3}$，故 $b-a$ 的最大值和最小值之和等于 2π.

◆ 7. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】由 $f(x)$ 的最小正周期是 π，知 $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$. 由 $f(x)$ 是偶函数知 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. 又当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)=\sin x$. ∴ $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

◆ 8. 由 $2\cos x-\sqrt{3}\geqslant 0$，得 $\cos x\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $2k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，又 $y=\cos x$ 的增区间为 $2k\pi-\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，∴ 函数 $y=\sqrt{2\cos x-\sqrt{3}}$ 的单调递增区间是 $\left\{x\,\middle|\,2k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

◆ 9. ∵ $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$，∴ $x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，∴ 当 $x-\frac{\pi}{3}=0$，即 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$y_{\max}=2$；当 $x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$，即 $x=\frac{2}{3}\pi$ 时，$y_{\min}=1$.

◆ 10. (1) ∵ $\frac{1-\sin x}{1+\sin x}>0$，∴ $-1<\sin x<1$.

∴ 函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})\right\}$

∵ $\frac{1-\sin x}{1+\sin x}>0$，∴ $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$.

(2) 由于函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})\right\}$

且 $f(-x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1-\sin(-x)}{1+\sin(-x)}$

$=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1+\sin(-x)}{1-\sin(-x)}\right)^{-1}$

$=-\log_{\frac{1}{2}}\frac{1+\sin(-x)}{1-\sin(-x)}=-f(x)$，

∴ 函数 $f(x)$ 为奇函数.

令 $t=\sin x$，则 $\frac{1-t}{1+t}=\frac{2}{1+t}-1$ 是 $(-1,1)$ 上的减函数，∴ 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{1+t}-1\right)$ 是 $(-1,1)$ 上的增函数.

又 ∵ $t=\sin x$ 在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$ 上是增函数. 在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3}{2}\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$ 上是减函数.

∴ 函数 $f(x)$ 是 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$ 上的增函数，是 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3}{2}\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$ 上的减函数.

◆ 11. ∵ $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，∴ $-\frac{\pi}{3}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{3}$.

∴ $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$.

若 $a>0$，则 $\begin{cases}2a+b=1,\\-\sqrt{3}a+b=-5.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=12-6\sqrt{3},\\b=-23+12\sqrt{3}.\end{cases}$

若 $a<0$，则 $\begin{cases}2a+b=-5,\\-\sqrt{3}a+b=1.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-12+6\sqrt{3},\\b=19-12\sqrt{3}.\end{cases}$

第二节　正切函数的性质与图象

学业测评

◆ 1. B 【解析】由题意得 $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)>0$，即 $\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)<0$，∴ $k\pi-\frac{\pi}{2}<x-\frac{\pi}{4}<k\pi$，∴ $k\pi-\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，故选 B.

◆ 2. B 【解析】∵ $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$，∴ $-1<\tan x<1$，故选 B.

◆◆ 3. C 【解析】用正切函数的周期性和单调性可得.

◆◆ 4. C 【解析】直线 $y=3$ 与 $y=\tan\omega x$ 图象的相邻交点的距离为 $y=\tan\omega x$ 的最小正周期，$\because d=T=\dfrac{\pi}{\omega}$，∴ 选 C.

◆◆ 5. ①② 【解析】①令 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，得 $0<\dfrac{x}{2}<\dfrac{\pi}{4}$，∴ $y=\tan\dfrac{x}{2}$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增；②$\tan\left(-\dfrac{x}{2}\right)=-\tan\dfrac{x}{2}$，故为奇函数；③$T=\dfrac{\pi}{\omega}=2\pi$，故③不正确；④令 $\dfrac{x}{2}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，得 $x\neq\pi+2k\pi$，∴ 定义域为 $\{x\mid x\neq\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，∴ ④不正确. 故应填①②.

◆◆ 6. $2k\pi-\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$ 【解析】$\because\tan\alpha=-1<0$ 且 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0$，∴ 角 α 的终边在第四象限，因此 $\alpha=2k\pi-\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$.

◆◆ 7. $\tan\left(-\dfrac{13\pi}{7}\right)=-\tan\dfrac{13\pi}{7}=-\tan\left(2\pi-\dfrac{\pi}{7}\right)=\tan\dfrac{\pi}{7}$，$\tan\left(-\dfrac{15\pi}{8}\right)=-\tan\dfrac{15\pi}{8}=-\tan\left(2\pi-\dfrac{\pi}{8}\right)=\tan\dfrac{\pi}{8}$. $\because 0<\dfrac{\pi}{8}<\dfrac{\pi}{7}<\dfrac{\pi}{2}$，且 $y=\tan x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$上是增函数，∴ $\tan\dfrac{\pi}{8}<\tan\dfrac{\pi}{7}$，即 $\tan\left(-\dfrac{13\pi}{7}\right)>\tan\left(-\dfrac{15\pi}{8}\right)$.

◆◆ 8. $\because y=\tan x$，$x\in\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$是增函数，∴ $k\pi-\dfrac{\pi}{2}<2x-\dfrac{\pi}{4}<k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即$\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{8}<x<\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{3\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$. 故函数的单调递增区间为$\left(\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{8},\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{3\pi}{8}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

◆◆ 9. 根据题意，可得：

$$\begin{cases}\dfrac{2\pi}{k}+\dfrac{\pi}{k}=\dfrac{3\pi}{2},\\ a\sin\left(\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)=b\cdot\tan\left(\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right),\\ a\sin\left(\dfrac{k\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}b\cdot\tan\left(\dfrac{k\pi}{4}-\dfrac{\pi}{3}\right)+1.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}k=2,\\ a=1,\\ b=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$ 故 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$g(x)=\dfrac{1}{2}\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

当 $k\pi-\dfrac{\pi}{2}<2x-\dfrac{\pi}{3}<k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$时，$g(x)$单调递增. 即$\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{12}<x<\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{5\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，函数 $g(x)$ 单调递增.

∴ $g(x)$的单调递增区间为$\left(\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{5\pi}{12}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

高考测评

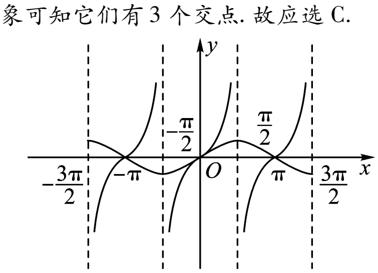
◆◆ 1. B 【解析】解法一：$\because$ 函数 $y=\tan\omega x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$内是单调函数，∴ 最小正周期 $T\geqslant\pi$，即$\dfrac{\pi}{|\omega|}\geqslant\pi$. 又函数 $y=\tan\omega x$ 在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$内是减函数，∴ $\omega<0$，解得 $-1\leqslant\omega<0$.

解法二：分别在各选项给出的区间上取特殊值来进行验证. 如取 $\omega=1$ 时，不符合题意，排除 A、C；取 $\omega=-2$ 时，$\pm\dfrac{\pi}{4}\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，但 $\tan\omega x=\tan\left(\pm\dfrac{\pi}{2}\right)$无意义，又排除 D. 故选 B.

◆◆ 2. D 【解析】当 $x=\dfrac{\pi}{8}$时，$2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，$y=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$无意义. 故选 D.

◆◆ 3. A 【解析】$y=\cos x$ 三个条件均不符合；$y=\tan\dfrac{x}{2}$的周期是 2π；$y=|\sin x|$是把 $y=\sin x$ 的图象在 x 轴下面的部分沿 x 轴翻折到上面而得到的，它是偶函数.

◆◆ 4. C 【解析】在同一坐标系中，首先作出 $y=\sin x$ 与 $y=\tan x$ 在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$内的图象，需明确 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，有 $\sin x<x<\tan x$（利用单位圆中的正弦线、正切线可证明），然后利用对称性作出 $x\in\left(-\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$内两函数的图象，如图所示，由图象可知它们有 3 个交点. 故应选 C.



第 4 题图

5. $\pm\frac{2}{3}$ 【解析】$\because \frac{\pi}{|3a|}=\frac{\pi}{2}$，$\therefore |a|=\frac{2}{3}$，$\therefore a=\pm\frac{2}{3}$.

6. $b<c<a$ 【解析】利用 $y=\tan x$ 的单调性来判断，把1,2,3转化到 $y=\tan x$ 的同一单调区间.

7. 由题意得 $0\leqslant 1-\sqrt{3}\tan x\leqslant 1$，$\therefore 0\leqslant \tan x\leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in \mathbf{Z})$，$\therefore$ 函数 $f(1-\sqrt{3}\tan x)$ 的定义域是 $\left\{x \mid k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6},k\in \mathbf{Z}\right\}$.

8. $\because x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，$\therefore 0\leqslant \tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\sqrt{3}$.

$\because$ 对任意的 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，都有 $\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\geqslant k$，$\therefore \left[\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right]_{\min}\geqslant k$，$\therefore k\leqslant 0$.

9. $\because f(x)=f(x+1)-f(x+2)$，$\therefore f(x+1)=f(x+2)-f(x+3)$. 两式相加，得 $f(x)=-f(x+3)$，即 $f(x+3)=-f(x)$. $\therefore f(x+6)=f[(x+3)+3]=-f(x+3)=f(x)$，上式对定义域内任何实数 x 都成立，故 $f(x)$ 是周期 $T=6$ 的周期函数.

$\because f(x)=\tan(\omega x+\varphi)$，

$\therefore \tan(\omega a+\varphi+3\omega)=\tan[\omega(a+3)+\varphi]=f(a+3)$.

$\tan(\omega a+\varphi-3\omega)=\tan[\omega(a-3)+\varphi]=f(a-3)$.

$\because f(a+3)=f[(a-3)+6]=f(a-3)$，

$\therefore \tan(\omega a+\varphi+3\omega)=\tan(\omega a+\varphi-3\omega)$.

10. $\because 1<T<\frac{3}{2}$，$\therefore 1<\frac{\pi}{k}<\frac{3}{2}$，即 $\frac{2\pi}{3}<k<\pi$.

$\because k\in \mathbf{N}^*$，$\therefore k=3$，则 $f(x)=2\tan\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$，由 $3x-\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ 得 $x\neq\frac{5\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}$，$k\in \mathbf{Z}$，定义域不关于原点对称，$\therefore f(x)=2\tan\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$ 是非奇非偶函数. 由 $-\frac{\pi}{2}+k\pi<3x-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+k\pi$ 得 $-\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}$，$k\in \mathbf{Z}$.

$\therefore f(x)=2\tan\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的单调递增区间为 $\left(-\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3},\frac{5\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}\right)$，$k\in \mathbf{Z}$.

第三节 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象

学业测评

1. A 【解析】本题考查三角函数的知识，属于难题.

由函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)+\cos(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期为 π，可得 $\omega=2$，由 $f(-x)=f(x)$ 可得 $\varphi=\frac{\pi}{4}$. 故选 A.

2. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 【解析】由图象知：函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期为 $4\left(\frac{7}{12}\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$，而周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=2$，由五点作图法知：$2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=\pi$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，又 $A=\sqrt{2}$，所以函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $f(0)=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

3. A 【解析】观察图象可知，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中 $A=1$，$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，故 $\omega=2$，$\omega\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\varphi=0$，得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，故只要把 $y=\sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，再把各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍即可. 故选 A.

4. D 【解析】将函数 $y=\tan\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后，其图象的函数是 $y=\tan\left(\omega x+\frac{\pi}{4}-\frac{\omega\pi}{6}\right)$，且图象与函数 $y=\tan\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象重合，所以 $\omega x+\frac{\pi}{4}-\frac{\omega\pi}{6}=\omega x+\frac{\pi}{6}+k\pi(k\in \mathbf{Z})$，$\therefore \omega=\frac{1}{2}-6k(k\in \mathbf{Z})$，$\because \omega>0$，$\therefore$ 当 $k=0$ 时，ω 取得最小值 $\frac{1}{2}$. 故选 D.

5. C 【解析】由图象可知所求函数的周期为 $\frac{2\pi}{3}$，故 $\omega=3$. 将 $\left(\frac{11\pi}{12},0\right)$ 代入解析式得 $\frac{11}{4}\pi+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{4}+2k\pi(k\in \mathbf{Z})$. 令 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$ 代入解析式得 $f(x)=A\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$，又

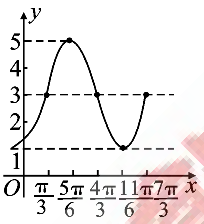
因为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-A\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{2}{3}$，故 $A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 所以 $f(0)=A\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=A\cos\frac{\pi}{4}=\frac{2}{3}$. 故选 C.

◆ 6. D 【解析】当 $a=0$ 时，$f(x)=1$ 时，图象即为 C；当$0<a<1$时，三角函数的周期为 $T=\frac{2\pi}{a}>2\pi$，图象即为 A；当 $a>1$ 时，三角函数的周期为 $T=\frac{2\pi}{a}<2\pi$，图象即为 B. 故选 D.

◆ 7. $\frac{7\pi}{6}$ 【解析】$y=2\sin\left(-2x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left[\pi-\left(-2x-\frac{\pi}{6}\right)\right]=2\sin\left(2x+\frac{7}{6}\pi\right)$.

◆ 8. $y=3\sin\left(6x+\frac{11}{6}\pi\right)$ 【解析】由题意有$A=3$，$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{3}$，$3\sin\varphi=-\frac{3}{2}$，$\therefore \omega=6,\varphi=\frac{11}{6}\pi$.

◆ 9. 如图所示：周期 $T=2\pi$，频率 $f=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}$，相位 $x-\frac{\pi}{3}$，初相 $-\frac{\pi}{3}$，最大值 5，最小值 1，函数的单调递减区间为 $\left[2k\pi+\frac{5}{6}\pi,2k\pi+\frac{11}{6}\pi\right](k\in\mathbf{Z})$，单调递增区间为 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{5}{6}\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.



第 9 题图

◆ 10. (1) 因为 $f(x)=4\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1=4\cos x\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)-1=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x-1=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π.

(2) 因为 $-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$，所以 $-\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{2\pi}{3}$. 于是，当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{6}$时，$f(x)$取得最大值 2；当 $2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$，即 $x=-\frac{\pi}{6}$时，$f(x)$ 取得最小值 -1.

高考测评

◆ 1. C 【解析】方法一：函数 $y=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)+2$ 的图象向右平移$\frac{4\pi}{3}$个单位后得到函数 $y=\sin\left[\omega\left(x-\frac{4\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]+2=\sin\left(\omega x-\frac{4\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3}\right)+2$ 的图象，因为两图象重合，所以 $\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)+2=\sin\left(\omega x-\frac{4\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3}\right)+2$，$\therefore \omega x+\frac{\pi}{3}=\omega x-\frac{4\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$. $\therefore \omega=\frac{3}{2}k,k\in\mathbf{Z}$. 当 $k=1$ 时，ω 的最小值是$\frac{3}{2}$.

方法二：本题的实质是已知函数 $y=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)+2(\omega>0)$ 的最小正周期是$\frac{4\pi}{3}$，求 ω 的值. 由 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{4\pi}{3}$，$\omega=\frac{3}{2}$. 故选 C.

◆ 2. A 【解析】$f(0)=4\sin 1>0$，$f(2)=4\sin 5-2$，由于 $\pi<5<2\pi$，所以 $\sin 5<0$，故 $f(2)<0$，故函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上存在零点；由于 $f(-1)=4\sin(-1)+1<0$，故函数 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上存在零点，也在 $[-2,0]$ 上存在零点；令 $x=\frac{5\pi-2}{4}\in[2,4]$，则 $f\left(\frac{5\pi-2}{4}\right)=4\sin\frac{5\pi}{2}-\frac{5\pi-2}{4}>0$，而 $f(2)<0$，所以函数在 $[2,4]$ 上存在零点. 综合各选项. 故选 A.

◆ 3. C 【解析】当 $x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y=\sin 2x=\sin 2(2k\pi)=0$，$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}>0$，$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2k\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$，显然周期最小的函数为 $y=\sin 2x$，过函数 $y=\sin 2x$ 的图象上的点 $(2k\pi,0)(k\in\mathbf{Z})$ 作一直线 $x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则此直线与另外两条曲线的两个交点的纵坐标分别为$\frac{1}{2}$，$-\frac{\sqrt{3}}{2}$，结合各选项可知错误的图象为 C. 故选 C.

◆ 4. D 【解析】依题意得 $T=\frac{2\pi}{\omega}=4\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$，$\omega=2$，$\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=1$. 又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$. 故选 D.

◆ 5. A 【解析】依题意得 $3\cos\left(\frac{8\pi}{3}+\varphi\right)=0$，$\frac{8\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$\varphi=k\pi-\frac{13\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，因此 $|\varphi|$ 的最小值是$\frac{\pi}{6}$. 故选 A.

◆ 6. $f(x)=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+1$ 【解析】由值域知 $A=[3-(-1)]\div 2=2$，则 $f(x)=2\sin(\omega x+$

$\varphi)+1$，再由$\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3}$知 $\omega=3,\varphi=\frac{\pi}{6}$.

◆ 7. $T=\pi$ 或图象过点$\left(0,\frac{3}{2}\right)$ 【解析】当 $T=\pi$ 时，有 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2,y_{max}=3$，有 $A=3$. 对称轴为 $x=\frac{\pi}{6}$，$\therefore 2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，即 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

$\therefore y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. 对于图象过点$\left(0,\frac{3}{2}\right)$，代入也能得出结果.

◆ 8. ②③ 【解析】(1)$\because f(x)$的最小正周期为 π. $\therefore x_1-x_2$ 必定为$\frac{\pi}{2}$的整数倍，$\therefore$ ①是错误的.

(2)$\because f(x)=4\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=4\cos\cdot\left(-2x+\frac{\pi}{6}\right)=4\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，$\therefore$ ②正确.

(3)$\because f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=4\sin\left(-\frac{2\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=0$，$\therefore$ ③正确. $\therefore$ 正确命题的序号为②③.

◆ 9. $y=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\varphi(\varphi>0)$个单位得 $y=\sin 2(x-\varphi)=\sin(2x-2\varphi)$，其对称轴为 $x=\frac{\pi}{6}$，则 $2\times\frac{\pi}{6}-2\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，$\varphi=-\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$. 当 $k=-1$ 时，φ 取得最小正值，且最小正值为 $\varphi=\frac{5\pi}{12}$.

◆ 10. 已知信号最大、最小的波动幅度为 6 和 -6，所以 $A=6$. 又根据图象上相邻两点的坐标为$\frac{\pi}{3}$和$\frac{5\pi}{6}$，间距相当于 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象的半个周期，所以 $T=2\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$. $\therefore T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=2$. 观察图象，点$\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$是五个关键点中的第三个点，$\therefore -\frac{\pi}{3}\times 2+\varphi=\pi$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

综上所述，$y=6\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

◆ 11. (1)$A=\sqrt{2},\frac{T}{4}=4\Rightarrow T=16,\frac{2\pi}{\omega}=16\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{8}$，$\therefore f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\varphi\right)$. 又$(-2,0)$是正弦曲线在一个周期内的起点，所以 $y=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{\pi}{4}\right)$，故 $A=\sqrt{2},\omega=\frac{\pi}{8},\varphi=\frac{\pi}{4}$.

(2)设 $M(x,y)$为 $g(x)$图象上一点，则 M 关于 $x=8$ 的对称点 $N(x',y')$在 $f(x)$的图象上，即 $y'=f(x')$，$\therefore x'=16-x,y'=y$.

$\therefore g(x)=f(x')=f(16-x)=\sqrt{2}\sin\left[\frac{\pi}{8}(16-x)+\frac{\pi}{4}\right]$，$\therefore g(x)=-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}x-\frac{\pi}{4}\right)$.

专题三 三角恒等变换

第一节 两角和与差的正弦、余弦和正切公式

学业测评

◆ 1. A 【解析】因为 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，α 是第三象限的角，所以 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，由两角和的正弦公式可得 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$. 故选 A.

◆ 2. A 【解析】依题意得$f(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，因此其最小正周期是 2π. 故选 A.

◆ 3. A 【解析】$\sin 43°\cos 13°-\cos 43°\sin 13°=\sin(43°-13°)=\sin 30°=\frac{1}{2}$. 故选 A.

◆ 4. C 【解析】由 $\sin\alpha>\sqrt{3}\cos\alpha$ 得 $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha>0$，$2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)>0$.

又 $0\leqslant\alpha<2\pi$，$-\frac{\pi}{3}\leqslant\alpha-\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{3}$，因此 $0<\alpha-\frac{\pi}{3}<\pi$，$\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{4\pi}{3}$. 故选 C.

◆ 5. C 【解析】$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{5}\Rightarrow\frac{3}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{5}\Rightarrow\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$. 所以 $\sin\left(\alpha+\frac{7\pi}{6}\right)=-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{4}{5}$. 故选 C.

◆ 6. $b>a>c$ 【解析】$b=2\cos 65°$，$c=2(\cos 43°\cos 24°-\sin 24°\sin 43°)=2\cos 67°$，$\therefore b>a>c$.

◆ 7. $\frac{56}{65}$ 【解析】将条件平方并两式相加得：$169+25+130(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=81+225$，$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\frac{112}{130}=\frac{56}{65}$.

◆ 8. $\because \tan\alpha+\tan\beta=4p,\tan\alpha\tan\beta=-3$，

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{4p}{1+3}=p$，

即 $\sin(\alpha+\beta)=p\cos(\alpha+\beta)$.

∴原式 $=(1+p^2)\cdot\cos^2(\alpha+\beta)=\dfrac{1+p^2}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}=\dfrac{1+p^2}{1+p^2}=1$.

◆ 9. (1) $f\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)=2\sin\left(\dfrac{1}{3}\times\dfrac{5\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sin\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}$.

(2) $f\left(3\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sin\left[\dfrac{1}{3}\left(3\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)-\dfrac{\pi}{6}\right]=2\sin\alpha=\dfrac{10}{13}$，即 $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$，$f(3\beta+2\pi)=2\sin\left[\dfrac{1}{3}(3\beta+2\pi)-\dfrac{\pi}{6}\right]=2\sin(\beta+\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{6}{5}$，即 $\cos\beta=\dfrac{3}{5}$，∵ $\alpha,\beta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，∴ $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{12}{13}$，$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\dfrac{4}{5}$.

∴ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{12}{13}\times\dfrac{3}{5}-\dfrac{5}{13}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{16}{65}$.

◆ 10. (1) $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2\cos\dfrac{2\pi}{3}+\sin^2\dfrac{\pi}{3}-4\cos\dfrac{\pi}{3}=-1+\dfrac{3}{4}-2=-\dfrac{9}{4}$.

(2) $f(x)=2(2\cos^2x-1)+(1-\cos^2x)-4\cos x=3\cos^2x-4\cos x-1=3\left(\cos x-\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{7}{3}$，$x\in\mathbf{R}$，因为 $\cos x\in[-1,1]$，所以，当 $\cos x=-1$ 时，$f(x)$ 取最大值 6；当 $\cos x=\dfrac{2}{3}$ 时，$f(x)$ 取最小值 $-\dfrac{7}{3}$.

高考测评

◆ 1. B 【解析】利用倍角公式化简得 $f(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$，故 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上是递减的，A 错；$f(x)$ 的最小正周期为 π，最大值为 1，C、D 错. 故选 B.

◆ 2. B 【解析】$\cos(\pi-2\alpha)=-\cos2\alpha=-(1-2\sin^2\alpha)=2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-1=-\dfrac{1}{9}$. 故选 B.

◆ 3. D 【解析】设底边长为 x，则腰长为 $2x$，顶角为 α. 则 $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{4}$，∴ $\cos\alpha=1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$. 故选 D.

◆ 4. D 【解析】由 $f(x)=(1+\cos2x)\sin^2x=(1+\cos2x)\cdot\dfrac{1-\cos2x}{2}=\dfrac{1}{2}(1-\cos^22x)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1+\cos4x}{2}\right)$，可以看出 $f(x)$ 是最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的偶函数. 故选 D.

◆ 5. A 【解析】$f(x)=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}}=\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+1}$，$f(-x)=f(x)$，故为偶函数，选项 B，D 错；因为 $y=\cos\dfrac{x}{2}$ 的最小正周期为 4π，故 $f(x)$ 的最小正周期为 4π. 故选 A.

◆ 6. $\dfrac{4}{9}$ 【解析】因为 $\tan2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{1-\tan^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{2\times2}{1-2^2}=-\dfrac{4}{3}$，而 $\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cot2x=-\dfrac{4}{3}$，所以 $\tan2x=\dfrac{3}{4}$，又因为 $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan x+1}{1-\tan x}=2$，所以解得 $\tan x=\dfrac{1}{3}$，所以 $\dfrac{\tan x}{\tan 2x}$ 的值为 $\dfrac{4}{9}$.

◆ 7. A 【解析】$\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta=\dfrac{1}{3}$，$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，平方得 $2\sin\theta\cos\theta=\sin2\theta=-\dfrac{7}{9}$.

◆ 8. (1) 已知 $\sin C+\cos C=1-\sin\dfrac{C}{2}$，

∴ $2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}+\cos^2\dfrac{C}{2}-\sin^2\dfrac{C}{2}=1-\sin\dfrac{C}{2}\Rightarrow\sin\dfrac{C}{2}\cdot\left(2\cos\dfrac{C}{2}-2\sin\dfrac{C}{2}+1\right)=0$.

又 C 为△ABC 中的角，∴ $\sin\dfrac{C}{2}\neq0$.

∴ $\sin\dfrac{C}{2}-\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(\sin\dfrac{C}{2}-\cos\dfrac{C}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\Rightarrow-2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}+\cos^2\dfrac{C}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{4}$.

∴ $2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow\sin C=\dfrac{3}{4}$.

(2) ∵ $a^2+b^2=4(a+b)-8$，

∴ $a^2+b^2-4a-4b+4+4=0\Rightarrow(a-2)^2+(b-2)^2=0\Rightarrow a=2,b=2$.

又∵ $\cos C=-\sqrt{1-\sin^2C}=-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，

∴ $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}=\sqrt{8+2\sqrt{7}}=\sqrt{7}+1$.

◆ 9. (1) $f(x)=\sin x\cos\dfrac{7\pi}{4}+\cos x\sin\dfrac{7\pi}{4}+$

$\cos x\cos\frac{3\pi}{4}+\sin x\sin\frac{3\pi}{4}=\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，∴ $T=2\pi$，$f(x)_{\max}=2$.

(2) ∵ $\cos(\beta-\alpha)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}$，$\cos(\beta+\alpha)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\frac{4}{5}$，

∴ $\cos\alpha\cos\beta=0$.

∵ $0<\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\beta=0\Rightarrow\beta=\frac{\pi}{2}$，

∴ $f(\beta)=\sqrt{2}\Rightarrow[f(\beta)]^2-2=0$.

10. (1) 由 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2x-1$，得 $f(x)=\sqrt{3}(2\sin x\cos x)+(2\cos^2x-1)=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π.

因为 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增，在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，又 $f(0)=1$，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 2，最小值为 −1.

(2) 由 (1) 可知 $f(x_0)=2\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)$.

又因为 $f(x_0)=\frac{6}{5}$，所以 $\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$.

由 $x_0\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，得 $2x_0+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right]$，

从而 $\cos\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{4}{5}$. 所以 $\cos 2x_0=\cos\left[\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\cos\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}+\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$.

11. (1) ∵ $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

$=\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)$

$=\frac{1}{4}\cos^2x-\frac{3}{4}\sin^2x$

$=\frac{1+\cos 2x}{8}-\frac{3-3\cos 2x}{8}=\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}$，

∴ $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2) $h(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$. 当 $2x+\frac{\pi}{4}=2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）时，$h(x)$ 取得最大值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. $h(x)$ 取得最大值时，对应的 x 的集合为 $\left\{x\mid x=k\pi-\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

第二节　简单的三角恒等变换

学业测评

1. C 【解析】由已知得 $f(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}+\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，当 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$，$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，因此 $f(x)$ 的最大值等于 $\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$. 故选 C.

2. C 【解析】依题意得 $\sqrt{3}\sin A\cos B+\sqrt{3}\cos A\sin B=1+\cos(A+B)$，$\sqrt{3}\sin(A+B)=1+\cos(A+B)$，$\sqrt{3}\sin C+\cos C=1$，$2\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)=1$，$\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$. 又 $\frac{\pi}{6}<C+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$，因此 $C+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$，$C=\frac{2\pi}{3}$. 故选 C.

3. A 【解析】∵ $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$，

∴ $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\times\frac{1}{2}+1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{7}{5}$.

4. C 【解析】$\cos 72°-\cos 36°=-2\cdot\sin 54°\sin 18°=-2\cos 36°\cdot\sin 18°=-\frac{2\cos 36°\sin 18°\cos 18°}{\cos 18°}=-\frac{\sin 72°}{2\cos 18°}=-\frac{1}{2}$.

5. D 【解析】∵ $5\pi<\theta<6\pi$，

∴ $\frac{5\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<3\pi$，$\frac{5\pi}{4}<\frac{\theta}{4}<\frac{3\pi}{2}$.

∴ $\sin\frac{\theta}{4}=-\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\theta}{2}}{2}}=-\sqrt{\frac{1-a}{2}}$.

6. $\frac{4}{3}$ 【解析】由韦达定理得

$$\begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{8}{7},\\ \tan\alpha\cdot\tan\beta=\dfrac{1}{7},\end{cases}$$

故 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\dfrac{4}{3}$.

7. $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ 【解析】∵ $y=\cos^2x+\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)+\dfrac{1}{2}\sin 2x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{1}{2}$,∴ $y_{\max}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

8. (1)当 $x=2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$时,$y=0$.

(2)当 $x\neq 2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$时,设 $t=\tan\dfrac{x}{2}$ $(t\in\mathbf{R})$,则函数 $y=\dfrac{\sqrt{3}\sin x}{2+\cos x}=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}}{2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}=\dfrac{2\sqrt{3}t}{3+t^2}$,∴ $yt^2-2\sqrt{3}t+3y=0$. 当 $y\neq0$ 时,$\Delta=12-12y^2\geqslant0$,∴ $-1\leqslant y\leqslant1$ 且 $y\neq0$.

综上,$-1\leqslant y\leqslant1$,即函数的值域为$[-1,1]$.

9. 由 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+2\alpha\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-2\alpha\right)$

$=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+2\alpha\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+2\alpha\right)$

$=\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+4\alpha\right)$

$=\dfrac{1}{2}\cos 4\alpha=\dfrac{1}{4}$得 $\cos 4\alpha=\dfrac{1}{2}$.

又因为 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$,所以 $\alpha=\dfrac{5\pi}{12}$.

于是 $2\sin^2\alpha+\tan\alpha-\dfrac{1}{\tan\alpha}-1$

$=-\cos 2\alpha+\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$=-\cos 2\alpha+\left(-\dfrac{2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\right)$

$=-\left(\cos 2\alpha+2\dfrac{1}{\tan 2\alpha}\right)$

$=-\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+\dfrac{2}{\tan\dfrac{5\pi}{6}}\right)$

$=-\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-2\sqrt{3}\right)=\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$.

10. (1)$f(x)=\dfrac{1}{2}\cos 2x=\dfrac{1}{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\sin 2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$,

所以要得到$f(x)$的图象只需要把$g(x)$的图象向左平移$\dfrac{\pi}{4}$个单位长度,再将所得的图象向上平移$\dfrac{1}{4}$个单位长度即可.

(2)$h(x)=f(x)-g(x)=\dfrac{1}{2}\cos 2x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{1}{4}$.

当 $2x+\dfrac{\pi}{4}=2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$时,

$h(x)$取得最小值 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1-2\sqrt{2}}{4}$.

$h(x)$取得最小值时,对应的 x 的集合为 $\left\{x\,\middle|\,x=k\pi+\dfrac{3\pi}{8},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

高考测评

1. B 【解析】∵ $\cos\left(\dfrac{5}{6}\pi+\alpha\right)=\cos\left[\pi-\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]=-\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 而 $\sin^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=1-\cos^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$.

∴ 原式 $=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{2+\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.

2. A 【解析】θ 是第二象限的角,且 $\cos\dfrac{\theta}{2}<0$,∴ $2k\pi+\dfrac{5}{4}\pi<\dfrac{\theta}{2}<2k\pi+\dfrac{3}{2}\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,

$\dfrac{\sqrt{1-\sin\theta}}{\sin\dfrac{\theta}{2}-\cos\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{\sqrt{\cos^2\dfrac{\theta}{2}-2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}+\sin^2\dfrac{\theta}{2}}}{\sin\dfrac{\theta}{2}-\cos\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{\cos\dfrac{\theta}{2}-\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}-\cos\dfrac{\theta}{2}}=-1$,故选 A.

3. C 【解析】$f(x)=(3\sin x-4\cos x)\cos x=3\sin x\cos x-4\cos^2x=\dfrac{3}{2}\sin 2x-2\cos 2x-2=\dfrac{5}{2}\sin(2x-\theta)-2$,其中 $\tan\theta=\dfrac{4}{3}$,∴ $f(x)$的最大值是$\dfrac{5}{2}-2=\dfrac{1}{2}$. 故选 C.

4. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ 【解析】$\cos 15°=\sqrt{\dfrac{1+\cos 30°}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

原式 $=(\sin 69°+\sin 39°)-(\sin 33°+\sin 3°)$

$=2\sin 54°\cos 15°-2\sin 18°\cos 15°$

$=2\cos 15°(\sin 54°-\sin 18°)$

$=2\cos 15°\cdot 2\sin 18°\cdot\cos 36°$

$=2\cos 15°\cdot\dfrac{4\sin 18°\cos 18°\cos 36°}{2\cos 18°}$

$=2\cos 15°\cdot\dfrac{2\sin 36°\cos 36°}{2\cos 18°}$

$=2\cos 15°\cdot\dfrac{\sin 72°}{2\cos 18°}=\cos 15°$

$=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

5. $\dfrac{1}{2}$ 【解析】原式 $=\dfrac{\sin 20°}{\sin 20°}(\cos 20°+\cos 60°+\cos 100°+\cos 140°)$

$=\dfrac{1}{\sin 20°}(\sin 20°\cos 20°+\sin 20°\cos 60°+\sin 20°\cos 100°+\sin 20°\cos 140°)$

$=\dfrac{1}{2\sin 20°}[\sin 40°+(\sin 80°-\sin 40)+(\sin 120°-\sin 80°)+(\sin 160°-\sin 120°)]$

$=\dfrac{1}{2\sin 20°}\times\sin 160°=\dfrac{\sin 20°}{2\sin 20°}=\dfrac{1}{2}$.

6. 2 010 【解析】$\because \dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=2\ 010$,

$\therefore \dfrac{1}{\cos 2\alpha}+\tan 2\alpha=\dfrac{1}{\cos 2\alpha}+\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=2\ 010$.

7. $y=\sin x\cdot 2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=-\sin x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=-\dfrac{1}{2}\left[\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

$=-\dfrac{1}{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{4}$

$\because \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)\in[-1,1]$,

$\therefore y_{\max}=\dfrac{3}{4}, y_{\min}=-\dfrac{1}{4}$.

8. 证明:$\because \sin\alpha+\sin\beta=\sin\alpha\sin\beta$,

$\therefore 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=-\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$.

$\therefore -4\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$=\left(1-2\sin^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)-\left(2\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}-1\right)$

$=2\left(1-\sin^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

$\therefore \cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}-2\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\sin^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}=1$,

$\therefore \left(\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}-\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2=1$.

9. (1) $\because \sin A+\sin B=\sin C\cdot(\cos A+\cos B)$, $\therefore 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cdot\cos\dfrac{A-B}{2}=2\sin C\cdot\cos\dfrac{A+B}{2}\cdot\cos\dfrac{A-B}{2}$.

在$\triangle ABC$中,$-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{A-B}{2}<\dfrac{\pi}{2}$,

$\therefore \cos\dfrac{A-B}{2}\neq 0$.

$\therefore \sin\dfrac{A+B}{2}=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cdot\sin\dfrac{C}{2}\cdot\cos\dfrac{C}{2}$.

$\therefore \cos\dfrac{C}{2}=2\sin^2\dfrac{C}{2}\cdot\cos\dfrac{C}{2}$.

$\therefore 1-2\sin^2\dfrac{C}{2}=0$,即 $\cos C=0$.

又 $0<C<\pi$,$\therefore C=\dfrac{\pi}{2}$.

$\therefore \triangle ABC$是直角三角形.

(2)在 Rt$\triangle ABC$中,设$\angle A$、$\angle B$所对边分别为a,b,则有$a=\sin A, b=\cos A$,$\therefore \triangle ABC$内切圆半径 $r=\dfrac{1}{2}(a+b-c)=\dfrac{1}{2}(\sin A+\cos A-1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(A+\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$. 故$\triangle ABC$内切圆半径$r$的取值范围是 $0<r\leqslant\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

10. (1) $\because y=\cot A+\dfrac{2\sin(B+C)}{\cos(B-C)-\cos(B+C)}=\cot A+\dfrac{2(\sin B\cos C+\cos B\sin C)}{2\sin B\sin C}=\cot A+\cot B+\cot C$.

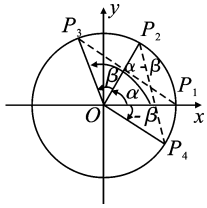
$\therefore$ 任意交换A,B,C的位置,y的值不变化.

(2) $\because \cos(B-C)\leqslant 1$,

$\therefore y=\cot A+\dfrac{2\sin A}{\cos A+\cos(B-C)}\geqslant\cot A+\dfrac{2\sin A}{\cos A+1}=\dfrac{1-\tan^2\dfrac{A}{2}}{2\tan\dfrac{A}{2}}+2\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\cot\dfrac{A}{2}+3\tan\dfrac{A}{2}\right)\geqslant\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{\cot\dfrac{A}{2}\cdot 3\tan\dfrac{A}{2}}=\sqrt{3}$,当且仅当 $\cos(B-C)=1$ 且$\sqrt{\cot\dfrac{A}{2}}=\sqrt{3\tan\dfrac{A}{2}}$,即 $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$时成立,故当 $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$时,$y_{\min}=\sqrt{3}$.

11. (1)①如图,在直角坐标系xOy内作单位圆O,并作出角α,β与$-\beta$,使角α的始边为Ox,交$\odot O$于点P_1,终边交$\odot O$于点P_2;角β的始边

为 OP_2，终边交⊙O 于点 P_3；角 $-\beta$ 的始边为 OP_1，终边交⊙O 于点 P_4.



第 11 题图

则 $P_1(1,0)$，$P_2(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$P_3(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$，$P_4(\cos(-\beta),\sin(-\beta))$. 由 $P_1P_3=P_2P_4$ 及两点间的距离公式，得 $[\cos(\alpha+\beta)-1]^2+\sin^2(\alpha+\beta)=[\cos(-\beta)-\cos\alpha]^2+[\sin(-\beta)-\sin\alpha]^2$，展开并整理，得 $2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$.

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

②由①易得，$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$，

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$.

$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]$

$=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+(-\beta)\right]$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(-\beta)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta)$

$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

(2)由题意，设△ABC 的角 B、C 的对边分别为 b,c，则 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{1}{2}$，则 $\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{1}{3}$. ∵ $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\cos A=3\sin A$. 又 $\sin^2A+\cos^2A=1$，

$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\cos A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

由题意 $\cos B=\frac{3}{5}$，得 $\sin B=\frac{4}{5}$.

$\therefore \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\frac{\sqrt{10}}{10}$. 故 $\cos C=\cos[\pi-(A+B)]=-\cos(A+B)=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

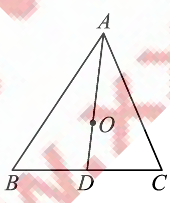
第二部分　平面向量

专题四　平面向量

第一节　平面向量的加法与减法

学业测评

1. C 【解析】分析三角形各“心”性质可得答案.



第 1 题图

当 O 是三角形的重心时，可知 O 是中线的三等分点，如图可知 $\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{OD}$，由向量加法的平行四边形法则知 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}$，$\therefore \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}=\mathbf{0}$，反之也成立. 用向量法解决三角形有关问题时，注意三角形的平面几何性质的作用.

2. C 【解析】对于 A，当 $\lambda<0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $-\lambda\boldsymbol{a}$ 方向相同；对于 B，$|-\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；当 $|\lambda|=1$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|$；当 $|\lambda|>1$ 时，$|-\lambda\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{a}|$；当 $|\lambda|<1$ 时，$|-\lambda\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{a}|$；对于 D，$|-\lambda\boldsymbol{a}|$ 是实数，而 $|\lambda|\boldsymbol{a}$ 是向量，$\therefore |-\lambda\boldsymbol{a}|\neq|\lambda|\boldsymbol{a}$.

$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向：$\lambda>0$ 时，方向相同；当 $\lambda<0$ 时，方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=0\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$，方向是任意的.

3. D 【解析】$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$，$\therefore \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=2\overrightarrow{AC}$.

$\therefore |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=2|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{2}$.

本题考查的是向量加法几何意义的灵活应用.

4. C 【解析】想方设法建立向量 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 的联系是关键.

∵ $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，而 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，$\therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}=\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{a}$.

熟练掌握向量加法的三角形法则. 灵活运用向量的加法和减法运算.

5. ①②③④ 【解析】将每个条件进行移项或加减法等价转换即得结论.

①∵ $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OM}$，$\therefore \overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}$，①正确. 同理，②③④说法均正确.

本题考查了向量的加减法的内在联系及相互转化，减去一个向量等于加上它的相反向量.

6. $c\quad b$ 【解析】本题考查了向量的加法、减法等基本运算，以及基本运算法则的应用.

$\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$.

(1)$\because$ O 为 BC 的中点，$\therefore \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$.

(2)$\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{DB}$.

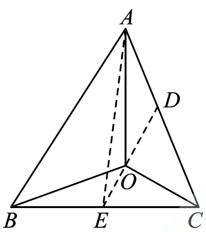
7. -8 【解析】$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2-(\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2$.

又$\because$ A、B、D 三点共线，则存在实数 λ，使 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BD}$.

$\therefore 2\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2)\Rightarrow\begin{cases}\lambda=2,\\k=-4\lambda,\end{cases}$

$\therefore k=-8$.

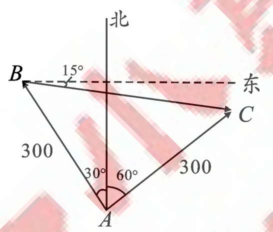
8. 3 【解析】如图所示，设 D、E 分别是 AC、BC 边的中点，则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}$，$2(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=4\overrightarrow{OE}$，则 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=2(\overrightarrow{OD}+2\overrightarrow{OE})=\mathbf{0}$，即 $\overrightarrow{OD}$ 与 $\overrightarrow{OE}$ 共线，且 $|\overrightarrow{OD}|=2|\overrightarrow{OE}|$，



第 8 题图

$\therefore \dfrac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle AOC}}=\dfrac{3}{2}$.$\therefore \dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AOC}}=\dfrac{3\times2}{2}=3$.

9. 首先根据题意作出图形，如图所示，然后由 A 地确定 B，C 两地的方位与距离. 根据题意和图形可知 $\angle BAC=90°$，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=300$ km，则可得 $|\overrightarrow{BC}|=300\sqrt{2}$ km；



第 9 题图

又由于 $\angle ABC=45°$，A 地在 B 地东偏南 $60°$ 的方向上，可知 C 地在 B 地东偏南 $15°$ 的方向上.

所以可得飞机从 B 地向 C 地飞行的方向为东偏南 $15°$，B、C 两地的距离为 $300\sqrt{2}$ km.

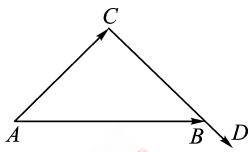
10. 基本事件的总数是 $4\times4=16$，在 $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$ 中，当 $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{ON}$，$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OQ}$ 时，点 G 分别为该平行四边形的各边的中点，此时点 G 在平行四边形的边界上，而其余情况中的点 G 都在平行四边形外，故所求的概率是 $1-\dfrac{4}{16}=\dfrac{3}{4}$.

高考测评

1. C 【解析】$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{OB}$，所以 $\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

2. A 【解析】$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

3. C 【解析】如图所示，由题意，得 $\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{BD}$，$\therefore \overrightarrow{CD}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{CB}$.



第 3 题图

又$\because \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$，

$\therefore \overrightarrow{CD}=\dfrac{4}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC}$.

$\therefore r=s=\dfrac{4}{3}$.$\therefore s+r=\dfrac{8}{3}$.

4. B 【解析】$\because \overrightarrow{CB}=\lambda\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}$，

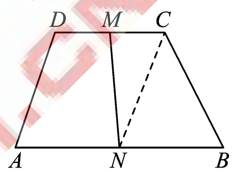
$\therefore \overrightarrow{CB}-\overrightarrow{PB}=\lambda\overrightarrow{PA}$.$\therefore \overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{PA}$.

$\therefore$ P、A、C 共线.

$\therefore$ 点 P 一定在 AC 边所在的直线上.

5. $\boldsymbol{b}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}\quad \dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

【解析】如图所示，连接 CN，N 为 AB 的中点，$AB=2CD$.



第 5 题图

$\therefore AN\parallel DC$，且 $AN=DC$，$\therefore ANCD$ 为平行四边形.

有 $\overrightarrow{CN}=-\overrightarrow{AD}=-\boldsymbol{b}$，

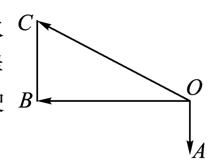
又由于 $\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BC}=\mathbf{0}$，

$\therefore \overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{CN}=\boldsymbol{b}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}$，

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CN}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

6. 2 【解析】因为 $3\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OC}$，所以 $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$，于是有 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}$，因此 $\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{BC}|}=2$.

7. 如图所示，OA 表示水流方向，$\overrightarrow{OB}$ 表示垂直于对岸横渡的方向，$\overrightarrow{OC}$ 表示船行驶速度的方向，由 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ 易知 $|\overrightarrow{OC}|=20$，$\angle AOC=120°$，即船行驶速度为 20 km/h，方向与水流方向成 $120°$ 角.



第 7 题图

8. $\overrightarrow{AM}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{MB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CB}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BA}=-2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

9. 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{e}_2$，则 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{e}_2$.

$\because \overrightarrow{BN}=\dfrac{1}{3}\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{BM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{e}_1$.

$\therefore \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BM}=\dfrac{1}{3}\boldsymbol{e}_2-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{e}_1$.

又∵ $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AM}=\boldsymbol{e}_2-\frac{3}{2}\boldsymbol{e}_1=3\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_2-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1\right)=3\overrightarrow{MN}$.

∴ 向量$\overrightarrow{MN}$与$\overrightarrow{MD}$共线，又 M 是公共点，故 M、N、D 三点共线.

10. (1) $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2=5\boldsymbol{e}_1+5\boldsymbol{e}_2=5(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=5\overrightarrow{AB}$，所以$\overrightarrow{BD}$与$\overrightarrow{AB}$共线，又因为有公共点 B，故 A、B、D 三点共线.

(2) 分别作向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$，过点 A、C 作直线 AC，观察发现，不论向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 怎样变化，点 B 始终在直线 AC 上，猜想 A、B、C 三点共线. 事实上，因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}$. 而$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{b}$，于是$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$，所以，$A$、$B$、$C$ 三点共线.

第二节　向量的数乘运算及其几何意义

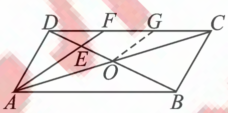
学业测评

1. A 【解析】依题意得 $2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=\boldsymbol{0}$，$\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$. 故选 A.

2. A 【解析】由题意得$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$，因此$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{CB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$与$\overrightarrow{BC}$反向平行. 故选 A.

3. A 【解析】画图易知$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$；$\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$，∴ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{c}+\frac{2}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\frac{2}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$. 故选 A.

4. B 【解析】如图所示，作 $OG\,//\,EF$ 交 DC 于点 G，由于 $DE=EO$，得 $DF=FG$. 又由 $AO=OC$ 得 $FG=GC$，又$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，于是$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)$，那么$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$. 故选 B.



第 4 题图

5. A 【解析】①中 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$；②中 $\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{a}$；③中 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{b}$；在④中若 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=\lambda(2\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)$，即 $(1-2\lambda)\boldsymbol{e}_1+(1+2\lambda)\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}$，∴ $1-2\lambda=1+2\lambda=0$ 矛盾，故④中 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线. 故选 A.

6. C 【解析】∵ $\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$，∴ $AB\,//\,CD$，且 $|\overrightarrow{AB}|\neq|\overrightarrow{CD}|$，而 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|$，∴ 四边形 $ABCD$ 为等腰梯形. 故选 C.

7. $\frac{1}{3}\boldsymbol{b}-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}$ 【解析】由题意知$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，连接 MN，∵ M，N 分别是 CB，AB 的中点，∴ $MN\,//\,AC$，$\frac{PM}{AP}=\frac{MN}{AC}=\frac{1}{2}$，∴ $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\boldsymbol{b}-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}$.

8. 共线 【解析】由题知实数 $p\neq0$，则 $p\boldsymbol{a}+(p+1)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 可化为 $\boldsymbol{a}=-\frac{p+1}{p}\boldsymbol{b}$，由向量共线定理可知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线.

9. (1) $5(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})+4(2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a})=15\boldsymbol{a}-10\boldsymbol{b}+8\boldsymbol{b}-12\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$；

(2) 原式 $=\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{a}+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{b}=\frac{7}{12}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$.

高考测评

1. C 【解析】由数乘定义和共线性质知 $DC\,//\,AB$，且 $DC=\frac{1}{2}AB$，则四边形 $ABCD$ 是梯形. 又 $AD=BC$，所以两腰相等，是等腰梯形.

2. D 【解析】当 $k=-1$ 时，$\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{d}$，所以 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 平行且方向相反.

3. A 【解析】由平行四边形法则可得$\overrightarrow{AK}=\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=3\lambda\overrightarrow{AE}+2\lambda\overrightarrow{AF}$. 由于 E，K，F 三点共线，则 $3\lambda+2\lambda=1$，所以 $\lambda=\frac{1}{5}$. 这道题“E，K，F 三点共线，则 $3\lambda+2\lambda=1$”是解题关键.

4. $2(m+n)\boldsymbol{b}$ 【解析】$(m+n)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(m+n)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=(m+n)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2(m+n)\boldsymbol{b}$.

5. $\overrightarrow{CF}=-\overrightarrow{AE}$ 【解析】设$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，∵ $DE=\frac{1}{13}DC$，$AF=\frac{12}{13}AB$，∴ $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{13}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF}=-\left(\boldsymbol{a}+\frac{1}{13}\boldsymbol{b}\right)=-\overrightarrow{AE}$.

6. 2 【解析】∵ O 是 BC 的中点，∴ $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{m}{2}\overrightarrow{AM}+\frac{n}{2}\overrightarrow{AN}$，∴ $\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{AO}-$

$\overrightarrow{AM}=\left(\frac{m}{2}-1\right)\overrightarrow{AM}+\frac{n}{2}\overrightarrow{AN}$.

又∵ $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{MN}$与$\overrightarrow{MO}$共线，

∴存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{MO}=\lambda\overrightarrow{MN}=\lambda(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM})$，即 $\begin{cases}\frac{m}{2}-1=-\lambda,\\ \frac{n}{2}=\lambda.\end{cases}$ 化简，得 $m+n=2$.

7. ①② 【解析】由①得：$10\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，故①是满足的条件. ②是满足的条件. 对于③，当 $x=y=0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不一定共线. 对于④，若 $AB\parallel CD$，则 $\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$共线，若 $AD\parallel BC$，则$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$不共线，故④不对，因此①②满足条件.

8. (1)设$\overrightarrow{OM}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(m-1)\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

∵ A,M,D 三点共线，∴ $\overrightarrow{AM}$与$\overrightarrow{AD}$共线.

故存在实数 t，使得$\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AD}$，即$(m-1)\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}=t\left(-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)$，∴ $(m-1)\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}=-t\boldsymbol{a}+\frac{t}{2}\boldsymbol{b}$，则有$\begin{cases}m-1=-t,\\ n=\frac{t}{2}.\end{cases}$

消去 t 得 $m-1=-2n$，即 $m+2n=1$. ①

∵ $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}-\frac{1}{4}\boldsymbol{a}=\left(m-\frac{1}{4}\right)\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}-\frac{1}{4}\boldsymbol{a}$，

又∵ C,M,B 共线，∴ $\overrightarrow{CM}$与$\overrightarrow{CB}$共线.

同理可得 $4m+n=1$. ②

联立①②解得 $m=\frac{1}{7}$，$n=\frac{3}{7}$，

故$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{7}\boldsymbol{a}+\frac{3}{7}\boldsymbol{b}$.

(2) $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OE}=\frac{1}{7}\boldsymbol{a}+\frac{3}{7}\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}=\left(\frac{1}{7}-\lambda\right)\boldsymbol{a}+\frac{3}{7}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}=\mu\overrightarrow{OB}-\lambda\overrightarrow{OA}=-\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$. 又∵ $\overrightarrow{EM}$与$\overrightarrow{EF}$共线，故存在实数 k，使得$\overrightarrow{EM}=k\overrightarrow{EF}$，即$\left(\frac{1}{7}-\lambda\right)\boldsymbol{a}+\frac{3}{7}\boldsymbol{b}=k(-\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=-\lambda k\boldsymbol{a}+\mu k\boldsymbol{b}$. ∴ $\begin{cases}\frac{1}{7}-\lambda=-\lambda k,\\ \frac{3}{7}=\mu k.\end{cases}$ 消去 k 得 $\frac{1}{7}-\lambda=-\lambda\cdot\frac{3}{7\mu}$. 整理得$\frac{1}{7\lambda}+\frac{3}{7\mu}=1$，得证.

这道题比较复杂，需要多次计算. 在遇到向量共线时，可以利用共线性质和线性运算表示同样的向量，进而构造二元一次方程组，这是常用而简便的办法，要好好体会. 第(2)问中粗看有三个未知数，但最终的结果没有要求求出 λ 和 μ 的值，所以消去 k 就可以化简得证.

9. 若$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$的终点 A,B,C 共线，则$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{BC}$，故存在实数 m，使得$\overrightarrow{BC}=m\overrightarrow{AB}$.

又$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，故$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$，$\overrightarrow{OC}=-m\overrightarrow{OA}+(1+m)\overrightarrow{OB}$.

令 $\lambda=-m$，$\mu=1+m$，则存在 λ,μ 且 $\lambda+\mu=1$，使得$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$；

反之，若$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，其中 $\lambda+\mu=1$，则 $\mu=1-\lambda$，$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}$.

从而有$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\lambda(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$，即$\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{BA}$.

所以 A,B,C 三点共线，即向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$的终点 A,B,C 共线.

10. 设 $p\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$q\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$，$C'$为直线 $A'B'$ 上任意一点，∵ O,A,B 不共线，

∴ $\overrightarrow{OC'}=m\overrightarrow{OA'}+n\overrightarrow{OB'}=mp\overrightarrow{OA}+nq\overrightarrow{OB}$，且 $m+n=1$.

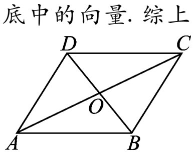
∵ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，∴可设 $m=\frac{1}{p}$，$n=\frac{1}{q}$，∴ $\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，又∵ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，∴ C 与 C' 重合，故连接 $p\overrightarrow{OA}$，$q\overrightarrow{OB}$两个向量终点的直线通过一个定点 C.

第三节　平面向量的基本定理

学业测评

1. B 【解析】平面内向量的基底不唯一. 同一平面内任何一组不共线的向量都可以作为平面内所有向量的基底；而零向量可看成与任何向量平行，故零向量不可作为基底中的向量. 综上所述，②③正确.

2. B 【解析】如图所示，①$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{AB}$不共线；②$\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DA}\parallel\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DA}$与$\overrightarrow{BC}$共线；③$\overrightarrow{CA}$与$\overrightarrow{DC}$不共线；④$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OD}\parallel\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OD}$与$\overrightarrow{OB}$共线. 由平面向量基底的概念知①③可构成平面内所有向量的基底.



第 2 题图

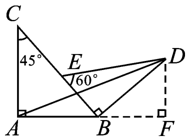
3. D 【解析】令$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{AG}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$\overrightarrow{GB}=-\overrightarrow{BG}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BF}=-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\right)=-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{CG}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}=-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right)=-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$，

∴ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-$

$\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

◆◆ 4. D 【解析】$\because \overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，$\therefore \overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_1}=\lambda(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP})$，即$(1+\lambda)\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{OP_2}$，$\therefore \overrightarrow{OP}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OP_1}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OP_2}=\frac{1}{1+\lambda}\boldsymbol{a}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\boldsymbol{b}$. 故选 D.

◆◆ 5. $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\frac{\sqrt{3}}{2}$　【解析】



第 5 题图

如图所示，作 $DF\perp AB$ 交 AB 的延长线于点 F，设$AB=AC=1$，则 $BC=DE=\sqrt{2}$，$\because \angle DEB=60°$，$\therefore BD=\frac{\sqrt{6}}{2}$. 又$\angle DBF=180°-45°-90°=45°$，$\therefore DF=BF=\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故$x=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故填$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$；$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

◆◆ 6. $\{\lambda\mid\lambda\neq 4\}$　【解析】使 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为基底，则使 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 不共线，$\therefore \lambda-2\times2\neq0$. $\therefore \lambda\neq4$.

◆◆ 7. $\boldsymbol{0}$　【解析】原式$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})=\boldsymbol{0}$.

◆◆ 8. ①②④　【解析】对于①，$f(\boldsymbol{0})=f(0\cdot\boldsymbol{0}+0\cdot\boldsymbol{0})=0\cdot f(\boldsymbol{0})+0\cdot f(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$，因此①正确. 对于②，$f(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=2(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=\lambda\cdot(2\boldsymbol{a})+\mu\cdot(2\boldsymbol{b})=\lambda f(\boldsymbol{a})+\mu f(\boldsymbol{b})$，因此②正确. 对于③，$f(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})-\boldsymbol{e}$，$\lambda f(\boldsymbol{a})+\mu f(\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})+\mu(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{e})=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}-(\lambda+\mu)\boldsymbol{e}$，显然$(\lambda+\mu)\boldsymbol{e}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 不恒相等，因此③不正确. 对于④，当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 共线时，若 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 中有一个等于 $\boldsymbol{0}$，由于$f(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$，即此时 $f(\boldsymbol{a})$、$f(\boldsymbol{b})$ 中有一个等于 $\boldsymbol{0}$，$f(\boldsymbol{a})$、$f(\boldsymbol{b})$共线；若 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 均不等于 $\boldsymbol{0}$，设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，则有 $f(\boldsymbol{b})=f(\lambda\boldsymbol{a})=f(\lambda\boldsymbol{a}+0\cdot\boldsymbol{0})=\lambda f(\boldsymbol{a})+0\cdot f(\boldsymbol{0})=\lambda f(\boldsymbol{a})$，此时 $f(\boldsymbol{a})$、$f(\boldsymbol{b})$ 共线，综上所述，当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 共线时，$f(\boldsymbol{a})$、$f(\boldsymbol{b})$ 共线，因此④正确. 综上所述，其中的真命题是①②④.

◆◆ 9. $\because \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，$\therefore$ 存在唯一的实数 λ，使得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{c}$.　①

$\because \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，$\therefore$ 存在唯一的实数 μ，使得 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mu\boldsymbol{a}$.　②

由①－②得 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{c}-\mu\boldsymbol{a}$.

$\therefore (1+\mu)\boldsymbol{a}=(1+\lambda)\boldsymbol{c}$，即$(1+\mu)\boldsymbol{a}+(-1-\lambda)\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

又$\because \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不共线，$\therefore$ 由平面向量的基本定理得 $1+\mu=0$，$1+\lambda=0$，$\therefore \mu=-1$，$\lambda=-1$，$\therefore$ 有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，

$\therefore \boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{b}$，故 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.

◆◆ 10. $\because E$ 是对角线 AC 与 BD 的交点，$\therefore \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EC}=-\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{ED}=-\overrightarrow{DE}$. 在$\triangle OAE$ 中，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OE}$，同理$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OE}$.

以上各式相加得$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OE}$.

高考测评

◆◆ 1. B 【解析】由向量加法的平行四边形法则知，向量$\overrightarrow{OM}$和分别与$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$同向的单位向量之和共线，与$\overrightarrow{OA}$同向的单位向量即$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，与$\overrightarrow{OB}$同向的单位向量即$\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$. $\therefore \overrightarrow{OM}$可表示成$\lambda\left(\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\right)$.

◆◆ 2. C 【解析】$\because 4\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_1=-2(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)$，$\therefore$ 向量 $\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$ 与 $4\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_1$ 共线. 故 $\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，$4\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_1$ 不能作为一组基底.

◆◆ 3. A 【解析】$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}=-\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2=-(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)$. 又 A、B、D 三点共线，则$\overrightarrow{DB}$和$\overrightarrow{AB}$是共线向量，则 $k=2$，故选 A.

◆◆ 4. A 【解析】$\because \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}=\frac{5}{9}\overrightarrow{AB}$.

$\because \overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{5}{9}\boldsymbol{b}-\frac{5}{9}\boldsymbol{a}$，$\therefore \overrightarrow{OD}=\boldsymbol{a}+\left(\frac{5}{9}\boldsymbol{b}-\frac{5}{9}\boldsymbol{a}\right)=\frac{4}{9}\boldsymbol{a}+\frac{5}{9}\boldsymbol{b}$. 故选 A.

◆◆ 5. D 【解析】由 D 为 BC 的中点，E 为 AD 的中点，得$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\therefore \overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，$\therefore r=\frac{1}{4}$，$s=-\frac{3}{4}$，$r+s=-\frac{1}{2}$. 故选 D.

◆◆ 6. $\boldsymbol{a}=-\frac{1}{18}\boldsymbol{b}+\frac{7}{27}\boldsymbol{c}$　【解析】由题可设 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{b}+y\boldsymbol{c}$，即 $-\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2=x(4\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)+y(-3\boldsymbol{e}_1+12\boldsymbol{e}_2)$，$\therefore \begin{cases}-1=4x-3y,\\3=2x+12y.\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}x=-\frac{1}{18},\\y=\frac{7}{27}.\end{cases}$

◆◆ 7. $(-\infty,0)$　$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$　【解析】$\because \overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，根据平面向量的基本定理，$\because y$ 可以变化，$\therefore x$ 可以取任意负实数，故 $x\in(-\infty,0)$. 当 $x=-\frac{1}{2}$时，取$\overrightarrow{OA'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$. 过 A'作OB的平行线交OM于 M，过 M 作OA的平行线交OB于 E，则$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$. 同理，过 A'作OB的平行线交AB的延长线于 F，再过 F 作OA的平行线交OB的延长线于 H，则$\overrightarrow{OH}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$，因不包括边界，故 $y\in$

$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$. 故填$(-\infty,0)$;$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

8. 以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为基底分解$\overrightarrow{AM}$与$\overrightarrow{HF}$,实为用$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$表示向量$\overrightarrow{AM}$与$\overrightarrow{HF}$. 由H、M、F所在位置得$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$,

$\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\frac{1}{6}\boldsymbol{b}$.

9. 证明:设$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$,

由已知得$\overrightarrow{BL}=l\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CM}=m\boldsymbol{b}$,

$\because \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,

$\therefore \overrightarrow{AN}=n\overrightarrow{AB}=-n\boldsymbol{a}-n\boldsymbol{b}$,

$\therefore \overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BL}=(l-1)\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, ①

$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$, ②

$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AN}=-n\boldsymbol{a}+(1-n)\boldsymbol{b}$, ③

将①②③代入$\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\boldsymbol{0}$,

得$(l-n)\boldsymbol{a}+(m-n)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,$\therefore l=m=n$.

10. 由已知易得$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$,由$N,E,B$三点共线,设存在实线$m$,满足$\overrightarrow{AE}=m\overrightarrow{AN}+(1-m)\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}m\boldsymbol{b}+(1-m)\boldsymbol{a}$.

由C,E,M三点共线,设存在实数n,满足$\overrightarrow{AE}=n\overrightarrow{AM}+(1-n)\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}n\boldsymbol{a}+(1-n)\boldsymbol{b}$.

$\therefore \frac{1}{3}m\boldsymbol{b}+(1-m)\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}n\boldsymbol{a}+(1-n)\boldsymbol{b}$,

由于$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为基底,$\therefore \begin{cases}1-m=\frac{1}{2}n,\\ \frac{1}{3}m=1-n,\end{cases}$

解得$\begin{cases}m=\frac{3}{5},\\ n=\frac{4}{5},\end{cases}$ $\therefore \overrightarrow{AE}=\frac{2}{5}\boldsymbol{a}+\frac{1}{5}\boldsymbol{b}$.

11. $\because \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$,$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}$,$\therefore 2\overrightarrow{EF}=(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DF})$.

$\because E$、F分别是AC、BD的中点,

$\therefore \overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}=\boldsymbol{0}$,$\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DF}=\boldsymbol{0}$,

$\therefore \overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})$.

又$||\overrightarrow{AB}|-|\overrightarrow{CD}||\leqslant|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}|\leqslant|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{CD}|$,

$\therefore \frac{1}{2}\cdot||\overrightarrow{AB}|-|\overrightarrow{CD}||\leqslant|\overrightarrow{EF}|\leqslant\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{CD}|)$,

即$\frac{1}{2}|AB-CD|\leqslant EF\leqslant\frac{1}{2}(AB+CD)$.

第四节 平面向量的坐标表示

学业测评

1. C 【解析】$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x-x,1+x^2)=(0,1+x^2)$,易知$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$平行于$y$轴. 故选C.

2. B 【解析】由已知可设$\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}\Rightarrow\begin{cases}4=x-y,\\ 2=x+y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3,\\ y=-1.\end{cases}$ 故选B.

3. D 【解析】依题意得$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,x+1)$,$4\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}=(6,4x-2)$,$\because \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$4\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$平行,$\therefore 3(4x-2)=6(x+1)$,由此解得$x=2$. 故选D.

4. A 【解析】由已知可求得$P=\{(1,m)\}$,$Q=\{(1-n,1+n)\}$,再由交集的含义有$\begin{cases}1=1-n,\\ m=1+n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=0,\\ m=1,\end{cases}$ 故选A.

5. A 【解析】设点D为(m,n),则由题意得$(4,3)=2(m,n-2)=(2m,2n-4)$,则$\begin{cases}2m=4,\\ 2n-4=3,\end{cases}$ 由此解得$m=2$,$n=\frac{7}{2}$,点D为$\left(2,\frac{7}{2}\right)$. 故选A.

6. C 【解析】由于$\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{b}=(-2,m)$,因为$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,所以$1\times m=2\times(-2)\Rightarrow m=-4$,从而$\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{b}=(-2,-4)$,那么$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=2(1,2)+3(-2,-4)=(-4,-8)$. 故选C.

7. $(3,-8)$ 【解析】$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$,$\therefore \overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{AB}=(1,-3)-(-2,5)=(3,-8)$.

8. $\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$ 【解析】$\because \overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$,$\therefore \overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(-8,1)+(3,-2)=\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$.

9. 由中点坐标公式可得$D(0,1)$,$E(3,3)$,$F(1,0)$. 由画图及平面几何可知G点为AF的中点. $\therefore \overrightarrow{FG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FA}=\frac{1}{2}(1,4)=\left(\frac{1}{2},2\right)$.

10. 设其余三个顶点的坐标为$B(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,$D(x_3,y_3)$. 因为M是AB的中点,所以$3=\frac{-2+x_1}{2}$,$0=\frac{1+y_1}{2}$. 解得$x_1=8$,$y_1=-1$.

设MN的中点O为(x_0,y_0),则$x_0=\frac{3+(-1)}{2}=1$,$y_0=\frac{0+(-2)}{2}=-1$,而O既是AC的中点,又是BD的中点.

所以$x_0=\frac{x_A+x_2}{2}$,$y_0=\frac{y_A+y_2}{2}$,即$1=\frac{-2+x_2}{2}$,

$-1=\dfrac{1+y_2}{2}$. 解得 $x_2=4, y_2=-3$.

同理,解得 $x_3=-6, y_3=-1$.

所以 $B(8,-1), C(4,-3), D(-6,-1)$.

高考测评

1. C 【解析】$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=(\lambda-\mu,\lambda)$, $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(3,1)$, ∴ $\dfrac{\lambda-\mu}{\lambda}=3 \Rightarrow \dfrac{\lambda}{\mu}=-\dfrac{1}{2}$. 故选 C.

2. A 【解析】依题意得 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(3,5)-2(-2,1)=(7,3)$. 故选 A.

3. B 【解析】由题意得 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}=(1,3)-2(2,4)=(-3,-5)$. 故选 B.

4. A 【解析】由已知条件得直线 P_1P_2 与 x 轴交点的纵坐标为 0, 由定比分点坐标公式 $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ 得到 $0=\dfrac{2+6\lambda}{1+\lambda}$, 解得 $\lambda=-\dfrac{1}{3}$. 故选 A.

5. 5 【解析】依题意得 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=(3-k,-6)$, 由 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})/\!/\boldsymbol{b}$ 得 $-6=3(3-k)$, $k=5$.

6. $1+\sqrt{2}$ 【解析】由 A,B,C 共线知 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 共线.

$\overrightarrow{AB}=(1,a^2+a)$, $\overrightarrow{BC}=(1,a^3-a^2)$.

则有 $a^3-a^2=a^2+a \Rightarrow a=1\pm\sqrt{2}$ 或 $a=0$.

又 $a>0$, 故 $a=1+\sqrt{2}$. 故填 $1+\sqrt{2}$.

7. 2 【解析】由题意得 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda(1,2)+(2,3)=(\lambda+2,2\lambda+3)$. 又 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线, 因此有 $(\lambda+2)\times(-7)-(2\lambda+3)\times(-4)=0$, 由此解得 $\lambda=2$.

8. ∵ $\overrightarrow{AB}=(-2,3)$, $\overrightarrow{DC}=(-4,6)$, ∴ $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$.

∴ $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{DC}$ 且 $|\overrightarrow{AB}|\neq|\overrightarrow{DC}|$.

∴ 四边形 $ABCD$ 是梯形.

9. ∵ $O(0,0), A(1,2), B(4,5)$,

∴ $\overrightarrow{OA}=(1,2)$, $\overrightarrow{AB}=(3,3)$.

∴ $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}=(1+3t,2+3t)$.

若点 P 在第一象限, 则 $\begin{cases}1+3t>0,\\2+3t>0,\end{cases}$ $t>-\dfrac{1}{3}$.

10. 设 $A(x_1,\log_8 x_1)$, $B(x_2,\log_8 x_2)$.

∵ $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 共线, $\overrightarrow{OA}=(x_1,\log_8 x_1)$, $\overrightarrow{OB}=(x_2,\log_8 x_2)$, ∴ $x_1\log_8 x_2-x_2\log_8 x_1=0$.

由已知可知 $C(x_1,\log_2 x_1)$, $D(x_2,\log_2 x_2)$,

∴ $\overrightarrow{OC}=(x_1,\log_2 x_1)$, $\overrightarrow{OD}=(x_2,\log_2 x_2)$.

∴ $x_1\log_2 x_2-x_2\log_2 x_1=x_1\log_{2^3}x_2^3-x_2\log_{2^3}x_1^3=3(x_1\log_8 x_2-x_2\log_8 x_1)=0$.

∴ $\overrightarrow{OC}$ 与 $\overrightarrow{OD}$ 共线, 即 O、C、D 三点在同一条直线上.

11. (1) 由已知得 $A\left(-\dfrac{b}{k},0\right)$, $B(0,b)$, 则 $\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{b}{k},b\right)$, 于是 $\begin{cases}\dfrac{b}{k}=2,\\b=2,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}k=1,\\b=2.\end{cases}$

(2) 由 $f(x)>g(x)$ 得 $x+2>x^2-x-6$,

即 $(x+2)\cdot(x-4)<0$, 得 $-2<x<4$,

$\dfrac{g(x)+1}{f(x)}=\dfrac{x^2-x-5}{x+2}=x+2+\dfrac{1}{x+2}-5=\left(\sqrt{x+2}-\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}\right)^2-3\geqslant-3$.

其中当且仅当 $x+2=1$, 即 $x=-1$ 时等号成立, ∴ $\dfrac{g(x)+1}{f(x)}$ 的最小值是 -3.

第五节　平面向量的数量积

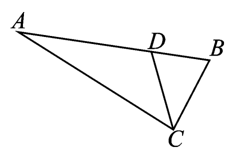
学业测评

1. C 【解析】∵ $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$, 两边平方后化简得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, 即 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$, 则 AM 为 Rt△ABC 斜边 BC 上的中线, 因此, $|\overrightarrow{AM}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|=2$. 故选 C.

2. D 【解析】方法一: 因为 $\cos A=\dfrac{AC}{AB}$, 故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A=AC^2=16$. 故选 D.

方法二: $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影为 $|\overrightarrow{AB}|\cos A=|\overrightarrow{AC}|$, 故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A=AC^2=16$. 故选 D.

3. B 【解析】如图所示, CD 平分 ∠ACB, 由角平分线定理得 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}=2$, 所以 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, 所以 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA}=\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$. 故选 B.



第 3 题图

4. D 【解析】由于 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线, 而 $(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线, 故①错; 由于 $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\leqslant||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$, 而 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线, ∴ 等号不成立, 故有 $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 成立, ∴ ②正确; ∵ $[(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}]\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=0$, ∴ $[(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}]\perp\boldsymbol{c}$, 故③错; $(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=9\boldsymbol{a}^2-$

$4\boldsymbol{b}^2=9|\boldsymbol{a}|^2-4|\boldsymbol{b}|^2$，∴ ④正确.

◆◆ 5. C 【解析】$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta+|\boldsymbol{b}|^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$.

◆◆ 6. D 【解析】依题意得 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

◆◆ 7. $\frac{5}{4}$ 【解析】$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)(k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=k\boldsymbol{e}_1^2+(1-2k)\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2-2|\boldsymbol{e}_2|^2=k+(1-2k)\cos\frac{2\pi}{3}-2=0$，解得 $k=\frac{5}{4}$.

◆◆ 8. -8 或 5 【解析】由 $3\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，可得 $7\boldsymbol{c}=-(3\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})$，即 $49\boldsymbol{c}^2=9\boldsymbol{a}^2+\lambda^2\boldsymbol{b}^2+6\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，而 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为单位向量，则 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{c}^2=1$，则 $49=9+\lambda^2+6\lambda\cos\frac{\pi}{3}$，即 $\lambda^2+3\lambda-40=0$，解得 $\lambda=-8$ 或 $\lambda=5$.

◆◆ 9. (1) 当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向，即 $\theta=0°$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sqrt{2}$；当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向，即 $\theta=180°$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\sqrt{2}$.

(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=3+\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3+\sqrt{2}}$.

(3) 由 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$ 得 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 45°.

◆◆ 10. 由向量 $2t\boldsymbol{e}_1+7\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为钝角，得 $\frac{(2t\boldsymbol{e}_1+7\boldsymbol{e}_2)\cdot(\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2)}{|2t\boldsymbol{e}_1+7\boldsymbol{e}_2||\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2|}<0$，即 $(2t\boldsymbol{e}_1+7\boldsymbol{e}_2)\cdot(\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2)<0$，化简，得 $2t^2+15t+7<0$，解得 $-7<t<-\frac{1}{2}$. 当夹角为 π 时，也有 $(2t\boldsymbol{e}_1+7\boldsymbol{e}_2)\cdot(\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2)<0$，但此时夹角不是钝角.

设 $2t\boldsymbol{e}_1+7\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2)$，$\lambda<0$，可求得

$$\begin{cases}2t=\lambda,\\7=\lambda t,\\\lambda<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-\sqrt{14},\\t=-\frac{\sqrt{14}}{2},\end{cases}$$

∴ 所求实数 t 的范围是 $\left(-7,-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)\cup\left(-\frac{\sqrt{14}}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

高考测评

◆◆ 1. D 【解析】∵ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}^2=0$，∴ $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB})=0$，即 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，∴ $\angle BAC=90°$. 故选 D.

◆◆ 2. D 【解析】∵ $\sqrt{(|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|)^2-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})^2}=\sqrt{|\boldsymbol{b}|^2\cdot|\boldsymbol{c}|^2-|\boldsymbol{b}|^2\cdot|\boldsymbol{c}|^2\cos^2\theta}=|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\sin\theta$，

又因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\sin\theta$. 故选 D.

◆◆ 3. C 【解析】因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{0}$，所以有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{c}^2$，整理得 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}^2$. ①

同理 $\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}^2$. ②

① − ②有 $\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{c}^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}^2-\boldsymbol{a}^2$.

由于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，所以 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{c}^2$，即 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{c}|$.

同理 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，所以 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$，

即 $|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{AB}|$，

所以 $\triangle ABC$ 是正三角形.

◆◆ 4. C 【解析】因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量，且夹角为钝角，所以 $\lambda=|\boldsymbol{a}|\cos\theta<0$，$\mu=|\boldsymbol{b}|\cos\theta<0$. 由于 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $|\boldsymbol{b}|$ 不一定相等，所以 λ 与 μ 不一定相等.

◆◆ 5. $-\frac{1}{4}$ 【解析】由题意得 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{7}{6}\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{4}$.

◆◆ 6. 60° 【解析】$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-6$，则 $a^2+a\cdot b-2b^2=-6$，即 $1^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\times2^2=-6$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}$，所以 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=60°$.

◆◆ 7. 60° 【解析】根据已知条件 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-2$，去括号得：$|\boldsymbol{a}|^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2|\boldsymbol{b}|^2=4+2\times2\cos\theta-2\times4=-2$，所以 $\cos\theta=\frac{1}{2}$，$\theta=60°$.

◆◆ 8. ∵ $|\boldsymbol{m}|=1$，$|\boldsymbol{n}|=1$，$\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 夹角为 60°，

∴ $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}=1\times1\times\cos60°=\frac{1}{2}$.

则有 $|\boldsymbol{a}|=|2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}|=\sqrt{(2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})^2}=\sqrt{4\boldsymbol{m}^2+4\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}^2}=\sqrt{7}$，

$$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{(2\boldsymbol{n}-3\boldsymbol{m})^2}=\sqrt{4\boldsymbol{n}^2-12\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}+9\boldsymbol{m}^2}=\sqrt{7}.$$

$$\because\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})\cdot(2\boldsymbol{n}-3\boldsymbol{m})=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}-6\boldsymbol{m}^2+2\boldsymbol{n}^2=-\frac{7}{2}.$$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{-\frac{7}{2}}{7}=-\frac{1}{2},$$

$\therefore$ $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°.

9. $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=2\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=2\times1^2+1\times1\times\cos120°-1^2=\frac{1}{2}$.

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}$
$=\sqrt{1+2\times1\times1\times\cos120°+1}=1$.

$\therefore$ 投影为$\frac{(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}$.

10. (1) 由 $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=61$ 得 $4|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3|\boldsymbol{b}|^2=61$.

$|\boldsymbol{a}|=4,|\boldsymbol{b}|=3$,代入上式求得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6$.

$\therefore\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-6}{4\times3}=-\frac{1}{2}$,

又 $\theta\in[0°,180°]$,

$\therefore\theta=120°$.

(2)可先平方转化为向量的数量积,

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=4^2+2\times(-6)+3^2=13$, $\therefore|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{13}$.

(3) $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin A=\frac{1}{2}\times4\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$.

11. 取 AB 的中点 C,设$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,于是有 $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$,得 $\boldsymbol{c}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$.

$\because$ PC 是 AB 的垂直平分线,$\therefore\overrightarrow{PC}\perp\overrightarrow{AB}$,

$\therefore\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

又$\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{p}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,

$\therefore(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{p})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=0$.

$\therefore\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{2}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}^2)=\frac{1}{2}(|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2)$.

$\therefore\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2)$.

第六节　平面向量数量积的坐标表示

学业测评

1. C 【解析】由题意可得 $8\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(6,3)$,又$(8\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=30$,$\boldsymbol{c}=(3,x)$,$\therefore18+3x=30\Rightarrow x=4$. 故选 C.

2. C 【解析】由题意可设 $\boldsymbol{b}=(x,y)$,则$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(8+x,6+y)=(3,18)$,解得 $x=-5,y=12$,故 $\boldsymbol{b}=(-5,12)$. $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{16}{65}$. 故选 C.

3. C 【解析】由题意知$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+0^2}=1$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-|\boldsymbol{b}|^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$,故 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直. 故选 C.

4. A 【解析】当 θ 为钝角时,$-1<\cos\theta<0$,即 $-1<\frac{-3\lambda+10}{\sqrt{\lambda^2+4}\cdot\sqrt{34}}<0$,解得 $\lambda>\frac{10}{3}$.

5. A 【解析】$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(1+2x,4)$,$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2-x,3)$,$\because\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 平行,$\therefore(1+2x)\times3-4\times(2-x)=0$,$\therefore x=\frac{1}{2}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(1,2)\cdot\left(\frac{1}{2},1\right)=1\times\frac{1}{2}+2\times1=\frac{5}{2}$.

6. C 【解析】设 $\boldsymbol{c}=(x,y)$,则$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(-1,-2)\cdot(x,y)=-x-2y=\frac{5}{2}$,又$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{5}$,且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=x+2y=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cdot\cos\alpha$,故 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$,$\alpha=120°$.

7. B 【解析】设 $\boldsymbol{b}=(x,y)$,由已知条件有
$\begin{cases}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|,\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{b}|\cos45°.\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}x^2+y^2=5,\\ 2x+y=\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ y=\frac{3\sqrt{2}}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}x=\frac{3\sqrt{2}}{2},\\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$

可利用画图检验,知后一组解不符合逆时针旋转的条件,应舍去,$\therefore\boldsymbol{b}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$,故选 B.

8. $(-3,6)$ 【解析】$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线且方向相反,$\therefore\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}(\lambda<0)$,设 $\boldsymbol{b}=(x,y)$,则$(x,y)=\lambda(1,-2)$,得$\begin{cases}x=\lambda,\\ y=-2\lambda.\end{cases}$ 由$|\boldsymbol{b}|=3\sqrt{5}$,得 $x^2+y^2=45$,即 $\lambda^2+4\lambda^2=45$,解得 $\lambda=-3$,$\therefore\boldsymbol{b}=(-3,6)$.

9. 设 $D(x,y)$,$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}=(3+x,y+1)$,$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(4+x,y-1)$,因为$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OB}$,

所以 $x-2y+1=0$. ①

因为 $\overrightarrow{BC}//\overrightarrow{OA}$，所以 $x-3y+7=0$. ②

解由①②组成的方程组得 $x=11,y=6$.

即 $\overrightarrow{OD}=(11,6)$.

10. 设 $\boldsymbol{b}=(x,y)$，由题意得 $\begin{cases}\sqrt{3}x+y=\sqrt{3},\\x^2+y^2=1.\end{cases}$

又∵ $\boldsymbol{b}$ 是不平行于 x 轴的向量，

∴ $y\neq0$. ∴ $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$ 故 $\boldsymbol{b}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

高考测评

1. A 【解析】设 $\boldsymbol{b}=(-x,2x)$ 且 $x>0$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-x)^2+(2x)^2}=3\sqrt{5}$，解得 $x=\pm3$，舍去负根，故 $\boldsymbol{b}=(-3,6)$. 故选 A.

2. D 【解析】$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3,n)$，由 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直可得 $(3,n)\cdot(-1,n)=-3+n^2=0$，∴ $n^2=3$，$|\boldsymbol{a}|=2$.

3. B 【解析】设 $\overrightarrow{AB}=(x,y)$，

则有 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{x^2+y^2}$，①

又由 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$，得 $5x+2y=0$，②

由①②联立方程组，解得 $x=2,y=-5$ 或 $x=-2,y=5$.

4. B 【解析】∵ $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角大于 $90°$，

∴ $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle<0$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，

即 $(m-2,m+3)\cdot(2m+1,m-2)<0$，

∴ $(m-2)\cdot(2m+1)+(m+3)(m-2)<0$，$(m-2)(3m+4)<0$.

∴ $-\dfrac{4}{3}<m<2$，故选 B.

5. C 【解析】设点 P 的坐标为 $(x,0)$，则 $\overrightarrow{AP}=(x-2,-2)$，$\overrightarrow{BP}=(x-4,-1)$. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(x-2)(x-4)+(-2)(-1)=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$. 当 $x=3$ 时，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ 有最小值 1，∴ 点 P 的坐标为 $(3,0)$，故选 C.

6. 等腰直角三角形 【解析】由已知得 $\overrightarrow{AB}=(3,-1)$，$\overrightarrow{AC}(-1,-3)$，$\overrightarrow{BC}=(-4,-2)$.

∴ $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{10}$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{10}$，$|\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{5}$，

∴ $|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2$ 且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$，

∴ $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

7. $\left(\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{5}\right)$ 或 $\left(-\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$ 【解析】设该单位向量为 $\boldsymbol{b}=(x,y)$，则 $x^2+y^2=1$，由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 知 $y=-\dfrac{3}{4}x$，联立方程组，解得 $\begin{cases}x=\dfrac{4}{5},\\y=-\dfrac{3}{5}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\dfrac{4}{5},\\y=\dfrac{3}{5},\end{cases}$ ∴ $\boldsymbol{b}=\left(\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{5}\right)$ 或 $\left(-\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$.

8. 22 【解析】∵ $\overrightarrow{BC}=(6,9)$，∴ $\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}=(2,3)$，$\overrightarrow{BF}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}=(4,6)$.

又 $\overrightarrow{AB}=(2,-4)$，∴ $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=(4,-1)$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=(6,2)$. ∴ $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=4\times6+(-1)\times2=22$.

9. ∵ $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，∴ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$.

又∵ $\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$，∴ $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+n\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

∴ $16=-4n$，$n=-4$.

∵ $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos120°$，

∴ $|\boldsymbol{b}|\times4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-4$，∴ $|\boldsymbol{b}|=2$.

∴ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，∴ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2m$.

又 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{b}^2$，

∴ $2m^2-16=-4$，$m^2=6$，∴ $m=\pm\sqrt{6}$.

当 $m=\sqrt{6}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\sqrt{6}$，

∴ $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}\times2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，∴ $\theta=\dfrac{\pi}{6}$；

当 $m=-\sqrt{6}$ 时，同理可求 $\theta=\dfrac{5\pi}{6}$.

综上所述，$m=\sqrt{6}$，$n=-4$ 时，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$；$m=-\sqrt{6}$，$n=-4$ 时，$\theta=\dfrac{5\pi}{6}$.

10. ∵ $\overrightarrow{AB}=(3,4)$，$\overrightarrow{AC}=(-8,6)$，

∴ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times(-8)+4\times6=0$，

∴ $AB\perp AC$.

又 $|\overrightarrow{AB}|=5\neq|\overrightarrow{AC}|=10$.

∴ $\triangle ABC$ 为直角三角形.

11. (1) 由于 $\boldsymbol{a}=(\cos\theta,\sin\theta)$，则 $\boldsymbol{a}^2=1$.

$f[f(\boldsymbol{x})]=f[\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}]=\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}-2\{[\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}]\cdot\boldsymbol{a}\}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}+2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}$，所以 $f[f(\boldsymbol{x})]$ 的结果不会随着 θ 取值范围的变化而变化.

(2) 由(1)知 $f[f(\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n})]=\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$，$f[f(2\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})]=2\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$，由 $f[f(2\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})]$ 与 $f[f(\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n})]$ 垂直可得 $(\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n})\cdot(2\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})=0$，即 $3\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}+\dfrac{15}{2}=0$，从而 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=-\dfrac{5}{2}$. 设 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 的夹角为 α，

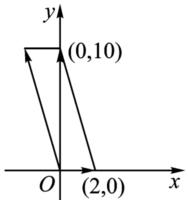
则 $\cos\alpha=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-\dfrac{5}{2}}{\sqrt{5}\times\dfrac{\sqrt{5}}{2}}=-1$，$\alpha=180°$，即向量 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 的夹角为 $180°$.

第七节　平面向量应用举例

学业测评

1. C 【解析】∵ $|\boldsymbol{b}|=1, |\boldsymbol{c}|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$, ∴ $(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{c}^2=0$, ∴ $(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$.

2. B 【解析】建立直角坐标系，如图所示，设表示河水流速的向量为$(2,0)$，表示小船实际速度的向量为$(0,10)$，表示小船本身速度的向量为(x,y)，则$(2,0)+(x,y)=(0,10)$. 解得$x=-2, y=10$，则小船速度大小（即速度向量的模）为$\sqrt{(-2)^2+10^2}=2\sqrt{26}$(m/s).



第 2 题图

3. D 【解析】由题意知$\boldsymbol{f}_4=-(\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{f}_3)=-[(-2,-1)+(-3,2)+(4,-3)]=-(-1,-2)=(1,2)$.

4. B 【解析】$|\overrightarrow{OA}|=1, |\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3}, \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$, ∴ $OA\perp OB$，且$\angle OBC=30°$. 又∵ $\angle AOC=30°$, ∴ $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$. ∴ $(m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0$, ∴ $-m\overrightarrow{OA}^2+n\overrightarrow{OB}^2=0$, ∴ $3n-m=0$，即$m=3n$, ∴ $\frac{m}{n}=3$.

5. 直角三角形 【解析】$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+|\overrightarrow{AB}|^2=\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，所以$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，故$\angle A=90°$，$\triangle ABC$为直角三角形.

6. 1 【解析】∵ $\overrightarrow{AB}=(-4,3)$, ∴ $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=-8+9=1$.

7. (1) 点M的坐标为$x_M=\frac{-1+1}{2}=0, y_M=\frac{7+2}{2}=\frac{9}{2}$, ∴ $M\left(0,\frac{9}{2}\right)$.

∴ $|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{(5-0)^2+\left[\frac{9}{2}-(-1)\right]^2}=\frac{\sqrt{221}}{2}$.

(2) $\angle ABC$是$\overrightarrow{BA}$与$\overrightarrow{BC}$的夹角，而$\overrightarrow{BA}=(6,-8)$, $\overrightarrow{BC}=(2,-5)$,

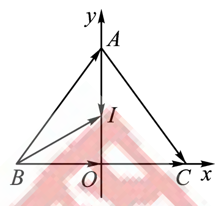
∴ $\cos\angle ABC=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}$

$=\frac{6\times2+(-8)\times(-5)}{\sqrt{6^2+(-8)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-5)^2}}$

$=\frac{52}{10\sqrt{29}}=\frac{26\sqrt{29}}{145}$.

8. 建立平面直角坐标系，内心为三角形三角的角平分线的交点，所以将一边和它的角平分线作为x轴和y轴，设定三顶点坐标和I点坐标，代入$\overrightarrow{AI}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{BC}$求值.

如图所示，建立平面直角坐标系，由题意知，$A(0,4)$, $B(-3,0)$, $C(3,0)$.



第 8 题图

∵ I为$\triangle ABC$的内心，$AB=AC$,

∴ 点I在y轴上，设其坐标为$I(0,k)$.

又$\overrightarrow{AB}=(-3,-4)$, $\overrightarrow{BC}=(6,0)$,

点I在$\angle ABC$的平分线上，

∴ $\overrightarrow{BI}$与$\overrightarrow{BA}$及$\overrightarrow{BC}$的单位向量的和向量共线.

设这个和向量为$\boldsymbol{u}$，则$\boldsymbol{u}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)+(1,0)=\left(\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right)$.

又$\boldsymbol{u}$的单位向量$\boldsymbol{u}_0=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$，它与$\overrightarrow{BI}$的单位向量相等，

$\overrightarrow{BI}=(3,k)$，由此得方程$\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{9+k^2}}$.

解方程，得$k=\frac{3}{2}$（另一负根不合题意，舍去）. ∴ $I\left(0,\frac{3}{2}\right)$.

∴ $\overrightarrow{AI}=\left(0,\frac{3}{2}-4\right)=\left(0,-\frac{5}{2}\right)$.

又$\overrightarrow{AI}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{BC}$,

即$\left(0,-\frac{5}{2}\right)=m(-3,-4)+n(6,0)$,

∴ $\begin{cases}-3m+6n=0,\\ -4m=-\frac{5}{2}.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}m=\frac{1}{10},\\ n=\frac{1}{20}.\end{cases}$

∴ $m=\frac{1}{10}, n=\frac{1}{20}$.

9. 证明：∵ $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$, ∴ $(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2=\overrightarrow{BC}^2$，即$\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2=\overrightarrow{BC}^2$.

由已知条件$\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2=5\overrightarrow{BC}^2$,

得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BC}^2$.

∵ $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$

$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CB})$

$=\frac{1}{4}[2\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CB}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CB}]$

$=\frac{1}{4}[2\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CB}]$

$=\frac{1}{4}(2\overrightarrow{BC}^2-2\overrightarrow{BC}^2)=0.$

$\therefore \overrightarrow{BE}\perp\overrightarrow{CF}$，即 $BE\perp CF$.

◆ 10. (1)∵ 函数图象过点(0,1)，

$\therefore 2\sin\varphi=1$，即 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$.

$\because 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，$\therefore \varphi=\frac{\pi}{6}$.

(2) 由函数 $y=2\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{6}\right)$ 及其图象，得 $M\left(-\frac{1}{6},0\right)$，$P\left(\frac{1}{3},2\right)$，$N\left(\frac{5}{6},0\right)$.

$\therefore \overrightarrow{PM}=\left(-\frac{1}{2},-2\right)$，$\overrightarrow{PN}=\left(\frac{1}{2},-2\right)$.

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PN}\rangle=\frac{\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}}{|\overrightarrow{PM}||\overrightarrow{PN}|}=\frac{15}{17}$.

本题是一道三角函数与向量结合的综合题，利用向量的夹角公式求夹角的余弦值.

高考测评

◆ 1. B 【解析】$\boldsymbol{F}=(8,0)$，故终点坐标为 $(8,0)+(1,1)=(9,1)$，故选 B.

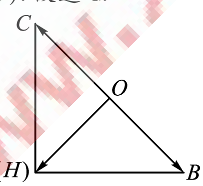
◆ 2. D 【解析】$F_甲:F_乙=\cos 30°:\cos 60°=\sqrt{3}:1$，故选 D.

◆ 3. B 【解析】船可垂直到达对岸，则船的实际速度与水速垂直，故 $|\boldsymbol{v}_2|<|\boldsymbol{v}_1|$.

◆ 4. C 【解析】在△ABC 中，$AC=1$，$BC=\sqrt{3}$，$AB=2$，$\therefore \frac{AB}{AC}=\frac{BE}{EC}=2$，$\therefore BE=2EC$，$\therefore |\overrightarrow{BC}|=3|\overrightarrow{CE}|$，$\therefore |\lambda|=3$. 又∵ $\overrightarrow{BC}$ 与 $\overrightarrow{CE}$ 方向相反，$\therefore \lambda<0$，$\therefore \lambda=-3$.

◆ 5. C 【解析】设 5 s 后点 P 运动到点 A，则 $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}=5\boldsymbol{v}=(20,-15)$，$\therefore \overrightarrow{OA}=(20,-15)+(-10,10)=(10,-5)$. 故选 C.

◆ 6. 1 【解析】不妨设该三角形为等腰直角三角形，如图所示，则外心 O 是 BC 中点，点 A 与点 H 重合，$m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=m\overrightarrow{OA}=m\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OH}$，$\therefore m=1$.



第 6 题图

◆ 7. $\frac{|\boldsymbol{F}|}{\sin\theta}$ 【解析】做受力分析，依题意，重力可以忽略不计，Q 受线的拉力为 $\boldsymbol{T}$，由于受力平衡，只能是线与杆垂直，即线与 OB 的夹角为 $\frac{\pi}{2}-\theta$，故 $|\boldsymbol{T}|=\frac{|\boldsymbol{F}|}{\sin\theta}$.

◆ 8. 设动点 M 的坐标为 (x,y)，则 $\overrightarrow{AM}=(x+1,y)$，$\overrightarrow{BM}=(x-1,y)$. 由题意 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=k|\overrightarrow{MC}|^2$，即 $(x+1,y)\cdot(x-1,y)=k[x^2+(y-1)^2]$，整理得 $(1-k)x^2+(1-k)y^2+2ky=1+k$. 此即为所求的动点轨迹方程. 当 $k=1$ 时，方程化为 $y=1$，方程表示过(0,1)点且平行于 x 轴的直线. 当 $k\neq1$ 时，方程化为 $x^2+\left(y+\frac{k}{1-k}\right)^2=\left(\frac{1}{1-k}\right)^2$，方程表示以 $\left(0,\frac{k}{k-1}\right)$ 为圆心，以 $\frac{1}{|k-1|}$ 为半径的圆.

◆ 9. (1) 若点 A、B、C 能构成三角形，则这三点不共线，由 $\overrightarrow{AB}=(3,1)$，$\overrightarrow{AC}=(2-m,1-m)$，由 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 不共线，得 $3(1-m)\neq 2-m$，解得 $m\neq\frac{1}{2}$.

(2)∵ ∠A 为直角，$\therefore \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，$\therefore 3(2-m)+(1-m)=0$，解得 $m=\frac{7}{4}$.

◆ 10. 证明：∵ $AB=AC$，D 是 BC 的中点，

$\therefore \overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$，即 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

又 $DE\perp AC$，$\therefore \overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AE}=0$.

∵ F 是 DE 的中点，$\therefore \overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$.

$\therefore \overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF})\cdot(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE})$

$=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DE}$

$=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DE}$

$=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DE}$

$=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DE}$

$=\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DE}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DE}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\cdot(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DE})=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{EC}=0.$

$\therefore AF\perp BE$.

第三部分　解三角形

专题五　解三角形

第一节　正弦定理

学业测评

◆ 1. C 【解析】由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 得 $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{\sqrt{2}\sin 60°}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又∵ $a<b$，$\therefore A<B$，故 $A=45°$. 故选 C.

2. D 【解析】由正弦定理得 $\frac{\sqrt{6}}{\sin 120^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{\sin C}$，所以 $\sin C=\frac{1}{2}$. 于是有 $C=30^\circ$. 从而 $A=30^\circ$. 于是，$\triangle ABC$ 是等腰三角形，$a=c=\sqrt{2}$. 故选 D.

3. B 【解析】由题意得 $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin 2B}{\sin B}=2\cos B$，所以 $\cos B=\frac{\sqrt{5}}{4}$. 故选 B.

4. D 【解析】依题意得 $0^\circ<B<60^\circ$，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 故选 D.

5. $2\sqrt{3}$ cm 【解析】$\because \frac{BC}{\sin A}=2R$，$\therefore BC=2R\sin A=4\sin 60^\circ=2\sqrt{3}$(cm).

6. 6 或 3 【解析】由 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 得 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为 $b<c$，所以 $C>B=30^\circ$，则 $C=60^\circ$ 或 $C=120^\circ$. 当 $C=60^\circ$ 时，$A=90^\circ$；当 $C=120^\circ$ 时，$A=30^\circ$. 再利用正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，解得 $a=6$ 或 $a=3$.

7. $k>\frac{1}{2}$ 【解析】由正弦定理知 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=k:(k+1):2k$.

又 $\begin{cases}a+b>c,\\ b+c>a,\\ a+c>b,\end{cases}$ 故 $\begin{cases}k+(k+1)>2k,\\ k+1+2k>k,\\ k+2k>k+1,\end{cases}$ $\therefore k>\frac{1}{2}$.

8. $2\sqrt{3}$ 【解析】$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=4\sqrt{3}$，又 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\therefore b=2\sqrt{3}$.

9. (1) 由正弦定理得 $\sin C\sin A=\sin A\cos C$.

因为 $0<A<\pi$，所以 $\sin A>0$. 从而 $\sin C=\cos C$. 又 $\cos C\neq 0$，所以 $\tan C=1$，则 $C=\frac{\pi}{4}$.

(2) 由 (1) 知 $B=\frac{3\pi}{4}-A$，于是

$\sqrt{3}\sin A-\cos\left(B+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}\sin A-\cos(\pi-A)=\sqrt{3}\sin A+\cos A=2\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$.

$\because 0<A<\frac{3\pi}{4}$，$\therefore \frac{\pi}{6}<A+\frac{\pi}{6}<\frac{11\pi}{12}$，从而当 $A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $A=\frac{\pi}{3}$ 时，$2\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$ 取最大值 2.

综上所述，$\sqrt{3}\sin A-\cos\left(B+\frac{\pi}{4}\right)$ 的最大值为 2，此时 $A=\frac{\pi}{3}$，$B=\frac{5\pi}{12}$.

10. (1) 由正弦定理得 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$，所以 $\frac{\cos A-2\cos C}{\cos B}=\frac{2c-a}{b}=\frac{2\sin C-\sin A}{\sin B}$，即 $\sin B\cos A-2\sin B\cos C=2\sin C\cos B-\sin A\cos B$，

即有 $\sin(A+B)=2\sin(B+C)$，

即 $\sin C=2\sin A$，所以 $\frac{\sin C}{\sin A}=2$.

(2) 由 (1) 知 $\frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}=2$，即 $c=2a$，又因为 $b=2$，所以由余弦定理得 $b^2=c^2+a^2-2ac\cos B$，即 $2^2=4a^2+a^2-2a\times 2a\times\frac{1}{4}$，解得 $a=1$，所以 $c=2$，又因为 $\cos B=\frac{1}{4}$，所以 $\sin B=\frac{\sqrt{15}}{4}$，故 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 1\times 2\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

高考测评

1. D 【解析】由正弦定理知 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

$\therefore \sin B=\frac{b}{a}\sin A$.

又 $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，$0<\sin B\leqslant 1$，$\therefore 0<\frac{b}{a}\sin A\leqslant 1$，$\therefore a\geqslant b\sin A$. 故选 D.

2. D 【解析】由已知得 $A=90^\circ$，$B=60^\circ$，$C=30^\circ$. 又由正弦定理得 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=1:\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{1}{2}=2:\sqrt{3}:1$. 故选 D.

3. C 【解析】由 $a=14$，$b=16$，$A=45^\circ$ 知 $\sin B=\frac{4\sqrt{2}}{7}$. 又 $\because a<b$，$A=45^\circ$，$\therefore B$ 有两解. 故选 C.

4. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 【解析】由正弦定理得 $(\sqrt{3}b-c)\cos A=(\sqrt{3}\cdot\sin B-\sin C)\cos A=\sin A\cos C$，即 $\sqrt{3}\sin B\cos A=\sin A\cos C+\sin C\cos A$，即 $\sqrt{3}\sin B\cos A=\sin(A+C)=\sin B$，故 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故填$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

◆ 5. $\frac{\pi}{6}$ 【解析】由题意可知 $\sin B+\cos B=\sqrt{2}$,所以$\sqrt{2}\sin\left(B+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$,所以 $B=\frac{\pi}{4}$,根据正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$可得$\frac{\sqrt{2}}{\sin A}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{4}}$,故 $A=\frac{\pi}{6}$.

故填$\frac{\pi}{6}$.

◆ 6. 60° 【解析】由 $\angle ADB=120°$知 $\angle ADC=60°$,又因为 $AD=2$,所以 $S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AD\cdot DC\sin 60°=3-\sqrt{3}$,所以 $DC=2(\sqrt{3}-1)$. 又因为 $BD=\frac{1}{2}DC$,所以 $BD=\sqrt{3}-1$. 过点 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E,则 $S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}DC\cdot AE=3-\sqrt{3}$,所以 $AE=\sqrt{3}$. 又在直角三角形 AED 中,$DE=1$,所以 $BE=\sqrt{3}$. 在直角三角形 ABE 中,$BE=AE$,所以$\triangle ABE$是等腰直角三角形,所以$\angle ABC=45°$. 在直角三角形 AEC 中,$EC=2\sqrt{3}-3$,所以 $\tan\angle ACE=\frac{AE}{EC}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3}=2+\sqrt{3}$,所以$\angle ACE=75°$,所以$\angle BAC=180°-75°-45°=60°$. 故填 60°.

◆ 7. 2 $(\sqrt{2},\sqrt{3})$ 【解析】由正弦定理得$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$,即$\frac{AC}{\sin 2A}=\frac{1}{\sin A}$,$\therefore\frac{AC}{2\sin A\cos A}=\frac{1}{\sin A}$,则$\frac{AC}{\cos A}=2$. 又$\triangle ABC$为锐角三角形,所以 $A+B=3A>90°$,$B=2A<90°$,故$30°<A<45°$,$\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos A<\frac{\sqrt{3}}{2}$,由 $AC=2\cos A$ 得 AC 的取值范围是$(\sqrt{2},\sqrt{3})$.

故分别填 2 和$(\sqrt{2},\sqrt{3})$.

◆ 8. (1)因为 $\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=\sin A\cos\frac{\pi}{6}+\cos A\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{1}{2}\cos A=2\cos A$,所以$\sqrt{3}\sin A=3\cos A$,解得 $\tan A=\sqrt{3}$,即 A 的值为 60°.

(2)因为 $\cos A=\frac{1}{3}$,所以 $\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,所以在$\triangle ABC$ 中,由正弦定理得$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$,因为 $b=3c$,所以$\frac{c}{\sin C}=\frac{3c}{\sin(A+C)}$,所以 $3\sin C=\sin(A+C)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cos C+\frac{1}{3}\sin C$,解得 $4\sin C=\sqrt{2}\cos C$,又因为 $\sin^2C+\cos^2C=1$,所以 $\sin C$ 的值为$\frac{1}{3}$.

◆ 9. $\because A+B+C=180°$,所以 $B+C=180°-A$,又 $1+2\cos(B+C)=0$,$\therefore 1+2\cos(180°-A)=0$,即 $1-2\cos A=0$,$\therefore\cos A=\frac{1}{2}$,又 $0°<A<180°$,所以 $A=60°$.

在$\triangle ABC$ 中,由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{2}\sin 60°}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,又$\because b<a$,所以 $B<A$,$\therefore B=45°$,$C=75°$,$\therefore BC$ 边上的高 $AD=AC\cdot\sin C=\sqrt{2}\sin 75°=\sqrt{2}\sin(45°+30°)=\sqrt{2}(\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30°)=\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

◆ 10. (1)由 $\cos A=\frac{3}{4}$得 $\sin A=\frac{\sqrt{7}}{4}$,又 $C=2A$,$\therefore\cos C=\cos 2A=2\cos^2A-1=\frac{1}{8}$,$\therefore\sin C=\frac{3\sqrt{7}}{8}$. $\cos B=-\cos(A+C)=\sin A\sin C-\cos A\cos C=\frac{9}{16}$.

(2)$\because\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{27}{2}$,即 $ca\cos B=\frac{27}{2}$,$\therefore ac=24$ ①,由正弦定理及 $C=2A$ 得$\frac{c}{\sin 2A}=\frac{a}{\sin A}$,$\therefore c=2a\cos A=\frac{3}{2}a$ ②,

由①②解得 $a^2=16$,$\therefore a=4$,即 $BC=4$.

◆ 11. (1)$\because A,B$ 为锐角,$\sin B=\frac{\sqrt{10}}{10}$,

$\therefore\cos B=\sqrt{1-\sin^2B}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

又 $\cos 2A=1-2\sin^2A=\frac{3}{5}$,

$\therefore\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because 0<A+B<\pi$,$\therefore A+B=\frac{\pi}{4}$.

(2)由(1)知 $C=\frac{3\pi}{4}$，$\therefore \sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 得 $\sqrt{5}a=\sqrt{10}b=\sqrt{2}c$，即 $a=\sqrt{2}b$，$c=\sqrt{5}b$.

$\because a-b=\sqrt{2}-1$，$\therefore \sqrt{2}b-b=\sqrt{2}-1$，$\therefore b=1$.

$\therefore a=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{5}$.

第二节　余弦定理

学业测评

1. C　【解析】$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}c\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{4}c=2$，$\therefore c=4\sqrt{2}$，$\therefore b^2=a^2+c^2-2ac\cos 45°=1+32-2\times1\times4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=25$，$\therefore b=5$，$\therefore \triangle ABC$ 外接圆的直径 $2R=\frac{b}{\sin B}=5\sqrt{2}$. 故选 C.

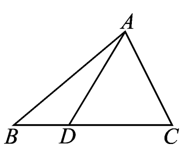
2. C　【解析】由 $a^4+b^4+c^4=2c^2(a^2+b^2)\Rightarrow(a^2+b^2-c^2)^2=2a^2b^2$，$\therefore \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore C=45°$ 或 $135°$. 故选 C.

3. $\frac{2\sqrt{39}}{3}$　【解析】$\because S=\sqrt{3}=\frac{1}{2}bc\sin A$，$\therefore \sqrt{3}=\frac{1}{2}c\cdot\sin 60°$，$\therefore c=4$，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=1^2+4^2-2\times1\times4\times\frac{1}{2}=13$，$\therefore a=\sqrt{13}$.

$\therefore \frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{\sqrt{13}}{\sin 60°}=\frac{2\sqrt{39}}{3}$.

4. 2,3,4　【解析】依题意，设三角形的三边长分别为 a，$a+1$，$a+2$，因为三角形为钝角三角形，则 $a^2+(a+1)^2-(a+2)^2<0$，即 $a^2-2a-3<0$，$\therefore -1<a<3$. 又 $a\in\mathbf{N}$，$\therefore a=1$ 或 $a=2$，而当 $a=1$ 时，三边长为 1,2,3 不能构成三角形，因此三角形三边长为 2,3,4.

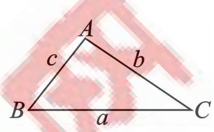
5. $2+\sqrt{5}$　【解析】如图所示，设 $AB=c$，$AC=b$，$BC=a$，则由题可知 $BD=\frac{1}{3}a$，$CD=\frac{2}{3}a$，所以根据余弦定理可得



第 5 题图

$b^2=(\sqrt{2})^2+\left(\frac{2}{3}a\right)^2-2\times\sqrt{2}\times\frac{2}{3}a\cos 45°$，$c^2=(\sqrt{2})^2+\left(\frac{1}{3}a\right)^2-2\times\sqrt{2}\times\frac{1}{3}a\cos 135°$，由题意知 $b=\sqrt{2}c$，可解得 $a=6+3\sqrt{5}$，所以 $BD=\frac{1}{3}a=2+\sqrt{5}$. 故填 $2+\sqrt{5}$.

6. 叙述：余弦定理：三角形任何一边的平方等于其它两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦值之积的两倍. 或：在 $\triangle ABC$ 中，a，b，c 为 A，B，C 的对边，有



第 6 题图①

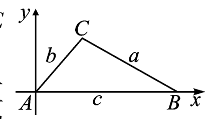
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，
$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

证明：(证法一) 如图，$a^2=\overrightarrow{BC}^2=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AC}^2-2|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos A+\overrightarrow{AB}^2=b^2-2bc\cos A+c^2$，

即　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

同理可证 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

(证法二) 已知 $\triangle ABC$ 中，A，B，C 所对边分别为 a，b，c，以 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴建立直角坐标系，则 $C(b\cos A,b\sin A)$，$B(c,0)$，



第 6 题图②

$\therefore a^2=|BC|^2=(b\cos A-c)^2+(b\sin A)^2=b^2\cos^2A-2bc\cos A+c^2+b^2\sin^2A=b^2+c^2-2bc\cos A$，

即 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

同理可证 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

7. (1) $\because A+B+C=180°$，$\therefore \frac{B+C}{2}=90°-\frac{A}{2}$，$\therefore \sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}$. 由 $8\sin^2\frac{B+C}{2}-2\cos 2A=7$ 得 $8\cos^2\frac{A}{2}-2\cos 2A=7$，$\therefore 4(1+\cos A)-2(2\cos^2A-1)=7$，即 $(2\cos A-1)^2=0$，$\therefore \cos A=\frac{1}{2}$. $\because 0°<A<180°$，$\therefore A=60°$.

(2) $\because a=\sqrt{3}$，$A=60°$，由余弦定理知 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$\therefore 3=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc=9-3bc$，$\therefore bc=2$. 又 $b+c=3$，$\therefore b=1$，$c=2$ 或 $b=2$，$c=1$.

8. (1) 由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 又 $0<A<\pi$，故 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\frac{1}{3}$.

(2) 原式 $=\dfrac{2\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\pi-A+\frac{\pi}{4}\right)}{1-\cos 2A}$

$=\dfrac{2\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin^2 A}$

$=\dfrac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A\right)}{2\sin^2 A}$

$=\dfrac{\sin^2 A-\cos^2 A}{2\sin^2 A}=-\dfrac{7}{2}.$

◆ 9. 由 $\cos A=\frac{12}{13}$ 得 $\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$. 又 $\frac{1}{2}bc\sin A=30$, $\therefore bc=156$.

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=bc\cos A=156\times\frac{12}{13}=144$.

(2) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(c-b)^2+2bc\cdot(1-\cos A)=1+2\times156\times\left(1-\frac{12}{13}\right)=25$, $\therefore a=5$.

◆ 10. (1) 由题意可知 $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2ab\cos C$, 所以 $\tan C=\sqrt{3}$.

因为 $0<C<\pi$, 所以 $C=\frac{\pi}{3}$.

(2) 由已知 $\sin A+\sin B=\sin A+\sin(\pi-C-A)=\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A=\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\sqrt{3}$. 当 $\triangle ABC$ 为正三角形时取等号, 所以 $\sin A+\sin B$ 的最大值是 $\sqrt{3}$.

高考测评

◆ 1. A 【解析】由①知若 $a^2>b^2+c^2$, 即 $b^2+c^2-a^2<0$, $\therefore \cos A<0$, 则 $\triangle ABC$ 为钝角三角形; 对于② A 为 $120°$; ③只能判断 C 为锐角, 不能说明 $\triangle ABC$ 为锐角三角形; ④由 $A:B:C=1:2:3$ 得 $A=30°$, $B=60°$, $C=90°$, 故 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}:1$. 故②③④错误. 故选 A.

◆ 2. C 【解析】由题意根据正弦定理有 $a^2\leqslant b^2+c^2-bc\Rightarrow b^2+c^2-a^2\geqslant bc\Rightarrow\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}\geqslant1\Rightarrow\cos A\geqslant\frac{1}{2}\Rightarrow0<A\leqslant\frac{\pi}{3}$. 故选 C.

◆ 3. B 【解析】由余弦定理得 $\cos A=\frac{9+16-13}{2\times3\times4}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$, $\therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$, AC 边上的高 $=AB\cdot\sin A=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

◆ 4. $\sqrt{3}<a<\sqrt{5}$ 【解析】若 c 为最大边, 则有 $\cos C>0$, 即 $b^2+a^2-c^2=a^2-3>0$, $\therefore a>\sqrt{3}$. 若 a 为最大边, 则有 $\cos A>0$, 即 $b^2+c^2-a^2=5-a^2>0$, $\therefore a<\sqrt{5}$. 综上有 $\sqrt{3}<a<\sqrt{5}$.

◆ 5. $135°$ 或 $45°$ 【解析】依题设条件得: $(a^2+b^2)^2-2c^2(a^2+b^2)+c^4=2a^2b^2$, 即 $(a^2+b^2-c^2)^2-2a^2b^2=0$.

$\therefore (a^2+b^2-c^2+\sqrt{2}ab)(a^2+b^2-c^2-\sqrt{2}ab)=0$.

即 $a^2+b^2-c^2=-\sqrt{2}ab$ 或 $a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$.

$\therefore \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

即 $\cos C=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore C=135°$ 或 $45°$.

◆ 6. $\frac{8}{15}$ 【解析】$S=a^2-(b-c)^2=a^2-(b^2+c^2)+2bc=\frac{1}{2}bc\sin A$.

又 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, 即 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$,

$\therefore$ 上式可化为 $-2bc\cos A+2bc=\frac{1}{2}bc\sin A$.

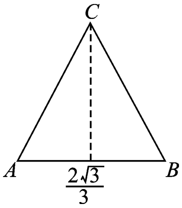
即 $\sin A+4\cos A=4$,

$\therefore \dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}+4\cdot\dfrac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}=4$.

解得 $\tan\frac{A}{2}=0$ (舍去), $\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{4}$.

$\therefore \tan A=\dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}=\dfrac{8}{15}$.

◆ 7. 4 【解析】方法一: 取 $a=b=1$, 则 $\cos C=\frac{1}{3}$, 由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=\frac{4}{3}$, $\therefore c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 在如图所示的等腰三角形 ABC 中, 可得 $\tan A=\tan B=\sqrt{2}$, 又 $\sin C=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan C=2\sqrt{2}$,



第 7 题图

$\therefore \frac{\tan C}{\tan A}+\frac{\tan C}{\tan B}=4$.

方法二：由 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=6\cos C$ 得 $\frac{a^2+b^2}{ab}=6\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，即 $a^2+b^2=\frac{3}{2}c^2$，∴ $\frac{\tan C}{\tan A}+\frac{\tan C}{\tan B}=\tan C\cdot\left(\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}\right)=\frac{\sin^2 C}{\cos C\sin A\sin B}=\frac{2c^2}{a^2+b^2-c^2}=4$. 故填 4.

◆ 8. (1) 由题设并利用正弦定理得
$$\begin{cases}a+c=\frac{5}{4},\\ ac=\frac{1}{4},\end{cases}$$
解得 $\begin{cases}a=1,\\ c=\frac{1}{4},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{1}{4},\\ c=1.\end{cases}$

(2) 由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-2ac-2ac\cos B=p^2b^2-\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}b^2\cos B$，即 $p^2=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos B$，因为 $0<\cos B<1$，得 $p^2\in\left(\frac{3}{2},2\right)$，由题设知 $p>0$，所以 $\frac{\sqrt{6}}{2}<p<\sqrt{2}$.

◆ 9. (1) 因为 A 点的坐标为 $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，根据三角函数的定义可知 $\sin\angle COA=\frac{4}{5}$.

(2) 因为三角形 AOB 为正三角形，所以 $\angle AOB=60°$.

由 (1) 知 $\sin\angle COA=\frac{4}{5}$，$\cos\angle COA=\frac{3}{5}$.

所以 $\cos\angle COB=\cos(\angle COA+60°)$

$=\cos\angle COA\cos 60°-\sin\angle COA\sin 60°$

$=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$，

所以 $BC^2=OC^2+OB^2-2OC\cdot OB\cdot\cos\angle BOC=1+1-2\times\frac{3-4\sqrt{3}}{10}=\frac{7+4\sqrt{3}}{5}$.

◆ 10. (1) 方法一：∵ $A(3,4)$，$B(0,0)$，∴ $AB=5$，∴ $\sin B=\frac{4}{5}$. 当 $c=5$ 时，$BC=5$.

∴ $AC=\sqrt{(5-3)^2+(4-0)^2}=2\sqrt{5}$.

由正弦定理知 $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}$.

∴ $\sin A=\frac{BC}{AC}\sin B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

方法二：∵ 点 $A(3,4)$，点 $B(0,0)$，∴ $AB=5$.

当 $c=5$ 时，$BC=5$，

∴ $AC=\sqrt{(5-3)^2+(0-4)^2}=2\sqrt{5}$.

由余弦定理知 $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{5^2+(2\sqrt{5})^2-5^2}{2\times5\times2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，∴ $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(2) ∵ $A(3,4)$，$B(0,0)$，$C(c,0)$，

∴ $AC^2=(c-3)^2+4^2$，$BC^2=c^2$.

由余弦定理得 $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$.

∵ A 为钝角，∴ $\cos A<0$，

即 $AB^2+AC^2-BC^2<0$，∴ $5^2+(c-3)^2+4^2-c^2=50-6c<0$，∴ $c>\frac{25}{3}$.

◆ 11. 由正弦定理知 $\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$，代入已知条件可得 $a^2-c^2=(\sqrt{2}a-b)b$，即 $a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$. 由余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{2}ab}{2ab}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴ $C=\frac{\pi}{4}$，

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$

$=\frac{1}{2}\cdot 2R\sin A\cdot 2R\sin B\sin C$

$=2R^2\sin A\sin\left(\frac{3}{4}\pi-A\right)\sin\frac{\pi}{4}$

$=2R^2\sin A\sin\left(\frac{3}{4}\pi-A\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\sqrt{2}R^2\left(\sin A\sin\frac{3}{4}\pi\cos A-\sin A\cos\frac{3}{4}\pi\sin A\right)$

$=\sqrt{2}R^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A\cos A+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2 A\right)$

$=R^2\left(\frac{1}{2}\sin 2A+\frac{1-\cos 2A}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}R^2(\sin 2A-\cos 2A+1)$

$=\frac{1}{2}R^2\left[\sqrt{2}\sin\left(2A-\frac{\pi}{4}\right)+1\right]$.

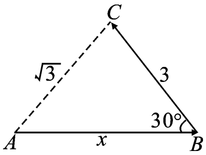
当 $2A-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $A=B=\frac{3}{8}\pi$ 时，$\sin\left(2A-\frac{\pi}{4}\right)$ 取最大值 1.

∴ $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}R^2$.

第三节　应用举例

学业测评

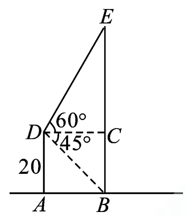
1. C 【解析】如图所示,设 $AB=x$,由余弦定理得 $(\sqrt{3})^2=3^2+x^2-2\times3x\cdot\cos30°$,解之得 $x=\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{3}$.



第 1 题图

2. A 【解析】由正弦定理可得 $\dfrac{60}{\sin(45°-30°)}=\dfrac{PB}{\sin30°}$,$PB=\dfrac{60\times\frac{1}{2}}{\sin15°}=\dfrac{30}{\sin15°}$,$h=PB\sin45°=(30+30\sqrt{3})$ m.

3. B 【解析】如图所示,由条件可知四边形 $ABCD$ 为正方形,$\therefore AB=CD=BC=AD=20$m,在 $\triangle DCE$ 中,$\angle EDC=60°$,$\angle DCE=90°$,$\therefore EC=DC\tan60°=20\sqrt{3}$m.



第 3 题图

$\therefore BE=BC+CE=(20+20\sqrt{3})$m. 故选 B.

4. $\sqrt{3}$ 【解析】设 $\triangle ABC$ 中,AB,BC,CA 边的长分别为 c,a,b,则 $a=7$,$b+c=20-7=13$,$p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)=10$(p 为三角形周长的一半).

又 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos60°=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc$,即 $7^2=13^2-3bc\Rightarrow bc=40$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times40\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$,

$\therefore r=\dfrac{S_{\triangle ABC}}{p}=\dfrac{10\sqrt{3}}{10}=\sqrt{3}$.

5. 12.2 海里 【解析】用正弦定理 $\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin A}$ 且 $A=60°$,$B=75°$,解得 $BC\approx12.2$ 海里.

6. 在 $\triangle ABP$ 中,$\angle ABP=360°-\gamma-90°-(90°-\beta)=180°-(\gamma-\beta)$. $\angle APB=90°-\alpha-(90°-\gamma)=\gamma-\alpha$,$AB=a$,由正弦定理得 $\dfrac{AB}{\sin\angle APB}=\dfrac{AP}{\sin\angle ABP}$,$\therefore AP=\dfrac{AB\sin\angle ABP}{\sin\angle APB}=\dfrac{a\sin[180°-(\gamma-\beta)]}{\sin(\gamma-\alpha)}=\dfrac{a\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle APQ$ 中,$PQ=AP\sin\alpha=\dfrac{a\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)}$,即山高为 $\dfrac{a\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)}$.

7. (1)设甲、乙两人起初的位置分别是 A,B,则 $AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos60°=3^2+1^2-2\times3\times1\times\dfrac{1}{2}=7$,$\therefore AB=\sqrt{7}$ km.

(2)设 t h 后甲、乙两人的位置分别为 P,Q,则 $AP=BQ=4t$,当 $0<t\leqslant\dfrac{3}{4}$ 时,$PQ^2=(3-4t)^2+(1+4t)^2-2(3-4t)(1+4t)\cos60°$;当 $t>\dfrac{3}{4}$ 时,$PQ^2=(4t-3)^2+(1+4t)^2-2(4t-3)(1+4t)\cos120°$. $\because\cos120°=-\cos60°$,$\therefore$ 上面两式实际是一致的,$\therefore PQ^2=48t^2-24t+7$,即 $PQ=\sqrt{48t^2-24t+7}$.

(3)由(2)知 $PQ=\sqrt{48t^2-24t+7}=\sqrt{48\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+4}$,当 $t=\dfrac{1}{4}$ 时,$PQ_{\min}=2$. 所以 $\dfrac{1}{4}$ 小时后,两人间的距离最短为 2km.

8. (1)由 $AB=\dfrac{H}{\tan\alpha}$,$BD=\dfrac{h}{\tan\beta}$,$AD=\dfrac{H}{\tan\beta}$ 及 $AB+BD=AD$ 得 $\dfrac{H}{\tan\alpha}+\dfrac{h}{\tan\beta}=\dfrac{H}{\tan\beta}$,解得 $H=\dfrac{h\tan\alpha}{\tan\alpha-\tan\beta}=\dfrac{4\times1.24}{1.24-1.20}=124$. 因此,算出的电视塔的高度 H 是 124m.

(2)由题设知 $d=AB$. 得 $\tan\alpha=\dfrac{H}{d}$.

由 $AB=AD-BD=\dfrac{H}{\tan\beta}-\dfrac{h}{\tan\beta}$ 得 $\tan\beta=\dfrac{H-h}{d}$,所以 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{h}{d+\dfrac{H(H-h)}{d}}\leqslant\dfrac{h}{2\sqrt{H(H-h)}}$.

当且仅当 $d=\dfrac{H(H-h)}{d}$,即 $d=\sqrt{H(H-h)}=\sqrt{125\times(125-4)}=55\sqrt{5}$ 时,上式取等号. 所以当 $d=55\sqrt{5}$ 时,$\tan(\alpha-\beta)$ 最大. 因为 $0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$,则 $0<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$,所以当 $d=55\sqrt{5}$ 时,$\alpha-\beta$ 最大.

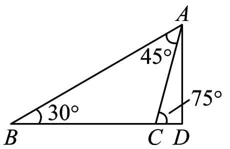
故所求的 d 是 $55\sqrt{5}$ m.

高考测评

1. C 【解析】因为 A,B 两点间距离不可直接测量,角 α,β 也不易测,因此可测量 a,b,γ,用余弦定理求得 AB 的长度.

2. C 【解析】如图所示,设 $BC=x$,在 $\triangle ABC$

中,由正弦定理可知$\frac{x}{\sin 45°}=\frac{10}{\sin 30°}$,解得 $x=10\sqrt{2}$ m.



第 2 题图

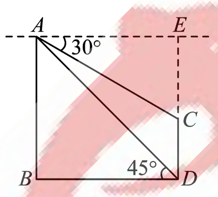
◆ 3. B 【解析】画出图形,利用 $AC=BC$,可知灯塔 A 在灯塔 B 的北偏西 10°.

◆ 4. C 【解析】由题知 $\angle CAD=60°$, $\cos B=\frac{BC^2+BD^2-CD^2}{2BC\cdot BD}=\frac{31^2+20^2-21^2}{2\times31\times20}=\frac{23}{31}$, $\sin B=\frac{12\sqrt{3}}{31}$.

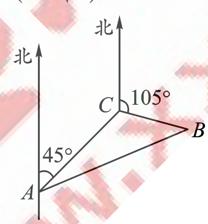
在△ABC 中,$AC=\frac{BC\cdot\sin B}{\sin\angle BAC}=24$,由余弦定理,得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle BAC$,即 $31^2=AB^2+24^2-2AB\times24\cos 60°$,解得 $AB=35$ 或 $AB=-11$(舍),∴ $AD=AB-BD=15$(千米).

◆ 5. 6 km 【解析】设水流速度和船速的合速度为 v,在三角形中,应用余弦定理可求得 $v=2\sqrt{3}$ km/h,其路程为 $2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=6$(km).

◆ 6. 60 $20(3-\sqrt{3})$ 【解析】画出图形如图所示,AB 表示甲楼,CD 表示乙楼,由题意知 $BD=60$, $\angle ADB=45°$, $\angle CAE=30°$,可得 $AB=60$, $CD=AB-CE=60-20\sqrt{3}=20(3-\sqrt{3})$.



第 6 题图



第 7 题图

◆ 7. $\frac{2}{3}$小时 【解析】如图所示,在△ABC 中,由已知可得 $\angle ACB=120°$,设舰艇追上渔船的最短时间为 t 小时,则 $AB=21t$, $BC=9t$, $AC=10$,则 $(21t)^2=(9t)^2+100-2\times10\times9t\cos 120°$,解得 $t=\frac{2}{3}$或 $t=-\frac{5}{12}$(舍).

◆ 8. (1)依题意有 $PA-PB=1.5\times8=12$(km), $PC-PB=1.5\times20=30$(km),∴ $PB=(x-12)$ km, $PC=(x+18)$ km.

在△PAB 中,$AB=20$km,由余弦定理得 $\cos\angle PAB=\frac{PA^2+AB^2-PB^2}{2PA\cdot AB}=\frac{x^2+20^2-(x-12)^2}{2x\cdot20}=\frac{3x+32}{5x}$. 同理 $\cos\angle PAC=\frac{72-x}{3x}$.

由于 $\cos\angle PAB=\cos\angle PAC$,即 $\frac{3x+32}{5x}=\frac{72-x}{3x}$,解得 $x=\frac{132}{7}$.

(2)作 $PD\perp a$,垂足为 D,在 Rt△PDA 中,$PD=PA\cos\angle APD=PA\cos\angle PAB=x\cdot\frac{3x+32}{5x}\approx17.71$(km).

◆ 9. (1)∵ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

∴ $b\cos A=a\cos B$,即 $b\cos A=a\cos B$.

由正弦定理得 $\sin B\cos A=\sin A\cos B$.

∴ $\sin(A-B)=0$. ∵ $-\pi<A-B<\pi$,

∴ $A-B=0$,∴ $A=B$.

(2)∵ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1$,∴ $b\cos A=1$.

由余弦定理得 $bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=1$,

即 $b^2+c^2-a^2=2$.

∵ 由(1)得 $a=b$,∴ $c^2=2$,∴ $c=\sqrt{2}$.

(3)∵ $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=\sqrt{6}$,∴ $|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6$.

即 $c^2+b^2+2=6$. ∴ $c^2+b^2=4$.

∵ $c^2=2$,∴ $b^2=2$, $b=\sqrt{2}$.

∴ △ABC 为正三角形.

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

◆ 10. 方法一:(1)设相遇时小艇航行的距离为 S 海里,

则 $S=\sqrt{900t^2+400-2\cdot30t\cdot20\cdot\cos(90°-30°)}$

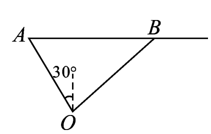
$=\sqrt{900t^2-600t+400}=\sqrt{900\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+300}$.

故当 $t=\frac{1}{3}$时,$S_{\min}=10\sqrt{3}$,

此时 $v=\frac{10\sqrt{3}}{\frac{1}{3}}=30\sqrt{3}$.

即小艇以 $30\sqrt{3}$海里/小时的速度航行,相遇时小艇的航行距离最短.

(2)设小艇与轮船在 B 处相遇,如图①所示,则 $v^2t^2=400+900t^2-2\cdot20\cdot30t\cdot\cos(90°-30°)$,故 $v^2=900-\frac{600}{t}+\frac{400}{t^2}$.



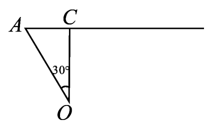
第 10 题图①

$\because 0<v\leqslant 30$，$\therefore 900-\dfrac{600}{t}+\dfrac{400}{t^2}\leqslant 900$，即$\dfrac{2}{t^2}-\dfrac{3}{t}\leqslant 0$，解得 $t\geqslant\dfrac{2}{3}$. 又 $t=\dfrac{2}{3}$时，$v=30$. 故 $v=30$ 时，t 取得最小值，且最小值等于$\dfrac{2}{3}$.

此时，在$\triangle OAB$ 中有 $OA=OB=AB=20$，故可设计航行方案如下：

航行方向为北偏东 30°，航行速度为 30 海里/小时，小艇能以最短时间与轮船相遇.

方法二：(1)若相遇时小艇的航行距离最短，又轮船沿正东方向匀速行驶，则小艇航行方向为正北方向，设小艇与轮船在 C 处相遇，如图②所示.



第 10 题图②

在 Rt$\triangle OAC$ 中，$OC=20\cos 30°=10\sqrt{3}$，$AC=20\sin 30°=10$. 又 $AC=30t$，$OC=vt$.

此时，轮船航行时间 $t=\dfrac{10}{30}=\dfrac{1}{3}$，

$$v=\frac{10\sqrt{3}}{\frac{1}{3}}=30\sqrt{3}.$$

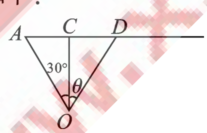
即小艇以 $30\sqrt{3}$海里/小时的速度航行，相遇时小艇的航行距离最短.

(2)猜想 $v=30$ 时，小艇能以最短时间与轮船在 D 处相遇，此时 $AD=DO=30t$.

又$\angle OAD=60°$，所以 $AD=DO=OA=20$，解得 $t=\dfrac{2}{3}$.

据此可设计航行方案如下：

航行方向为北偏东 30°，航行速度的大小为 30 海里/小时，这样，小艇能以最短时间与轮船相遇. 证明如下：



第 10 题图③

如图③所示，由(1)得 $OC=10\sqrt{3}$，$AC=10$；故 $OC>AC$，且对于线段 AC 上任意点 P，有 $OP\geqslant OC>AC$. 而小艇的最高航行速度只能达到 30 海里/小时，故小艇与轮船不可能在 A，C 之间(包含 C)的任意位置相遇.

设$\angle COD=\theta(0°<\theta<90°)$，则在 Rt$\triangle COD$ 中，$CD=10\sqrt{3}\tan\theta$，$OD=\dfrac{10\sqrt{3}}{\cos\theta}$.

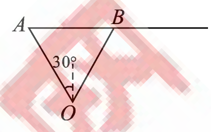
由于从出发到相遇，轮船与小艇所需要的时间分别为 $t=\dfrac{10+10\sqrt{3}\tan\theta}{30}$和 $t=\dfrac{10\sqrt{3}}{v\cos\theta}$，所以$\dfrac{10+10\sqrt{3}\tan\theta}{30}=\dfrac{10\sqrt{3}}{v\cos\theta}$.

由此可得 $v=\dfrac{15\sqrt{3}}{\sin(\theta+30°)}$.

又 $v\leqslant 30$，故 $\sin(\theta+30°)\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

从而，$30°\leqslant\theta<90°$.

由于 $\theta=30°$时，$\tan\theta$ 取得最小值，且最小值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 于是，当 $\theta=30°$时，$t=\dfrac{10+10\sqrt{3}\tan\theta}{30}$取得最小值，且最小值为$\dfrac{2}{3}$.



第 10 题图④

方法三：(1)同方法一或方法二.

(2)设小艇与轮船在 B 处相遇，如图④所示. 依据题意得 $v^2t^2=400+900t^2-2\cdot 20\cdot 30t\cdot\cos(90°-30°)$，即$(v^2-900)\cdot t^2+600t-400=0$.

①若 $0<v<30$，则由 $\Delta=360\ 000+1\ 600\cdot(v^2-900)=1\ 600(v^2-675)\geqslant 0$，得 $v\geqslant 15\sqrt{3}$.

从而，$t=\dfrac{-300\pm 20\sqrt{v^2-675}}{v^2-900}$，$v\in[15\sqrt{3},30)$.

a. 当 $t=\dfrac{-300-20\sqrt{v^2-675}}{v^2-900}$时，

令 $x=\sqrt{v^2-675}$，则 $x\in[0,15)$，

$t=\dfrac{-300-20x}{x^2-225}=\dfrac{-20}{x-15}\geqslant\dfrac{4}{3}$，当且仅当 $x=0$，即 $v=15\sqrt{3}$时等号成立.

b. 当 $t=\dfrac{-300+20\sqrt{v^2-675}}{v^2-900}$时，

同理可得$\dfrac{2}{3}<t\leqslant\dfrac{4}{3}$.

由 a.、b. 得，当 $v\in[15\sqrt{3},30)$时，$t>\dfrac{2}{3}$.

②若 $v=30$，则 $t=\dfrac{2}{3}$；

综合①、②可知，当 $v=30$ 时，t 取最小值，且最小值等于$\dfrac{2}{3}$.

此时，在$\triangle OAB$ 中，$OA=OB=AB=20$，故可设计航行方案如下：

航行方向为北偏东 30°，航行速度为 30 海里/小时，小艇能以最短时间与轮船相遇.